

# 时滞非线性参数系统有限时间状态约束控制

金 璇, 刘文慧

(南京师范大学南瑞电气与自动化学院, 江苏 南京 210023)

**[摘要]** 研究了具有输入时滞、有界外部干扰以及全状态约束的严格反馈连续时间参数化非线性系统的自适应有限时间跟踪控制问题. 通过使用 Barrier Lyapunov 函数和自适应反步法, 保证了系统所有状态都被约束. 针对输入时滞问题, 采用 pade 近似法消除其带来的负面影响. 所设计的有限时间控制器使闭环系统内的所有信号都有界且所有状态都被约束在给定的范围内, 同时输出信号能很好地追踪给定参考信号. 最后通过仿真实例验证了该控制方法的有效性.

**[关键词]** 非线性系统, 输入迟滞, 自适应有限时间控制, Barrier Lyapunov 函数, 全状态约束

**[中图分类号]** TP13 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2021)02-0040-07

## Finite-Time Control of Parameterized Nonlinear Systems with Full-State Constraints and Input Delay

Jin Xuan, Liu Wenhui

(NARI School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** This paper studies the problem of adaptive finite-time tracking control for strict-feedback parameterized nonlinear continuous-time systems with full state constraints, bounded external disturbances and input time delay. By utilizing Barrier Lyapunov functions and the adaptive backstepping method, all states of the system are ensured to be constrained. Then, for the problem of input delay, pade approximation method is used to eliminate the negative effect of input delay. The finite-time controller is designed such that all the signals in the closed-loop system are bounded, the output tracks the reference signal effectively and all states are ensured to remain in the predefined compact sets. Finally, the effectiveness of the proposed scheme is verified via simulation results.

**Key words:** nonlinear system, input delay, adaptive finite-time control, Barrier Lyapunov function, full state constraints

近年来非线性系统的控制问题引起了广泛的关注, 许多有效的控制方法陆续被提出, 例如滑模控制<sup>[1]</sup>、模糊控制<sup>[2]</sup>、鲁棒控制和自适应控制<sup>[3-6]</sup>. 自适应反步控制法<sup>[7-8]</sup>可以根据系统本身的状态, 构造保证系统存在不确定性时仍具有强鲁棒性的结构, 因此被广泛用于稳定非线性系统<sup>[9-11]</sup>. 众所周知, 参数不确定的非线性自适应控制也是非线性控制设计中的热点问题, 自适应反步技术被广泛用来解决不确定非线性系统的控制问题<sup>[12-15]</sup>. 然而参数化非线性系统状态约束和有限时间控制问题鲜有研究.

工业实际应用中存在各种各样的物理条件约束, 例如机械臂系统中位置和速度的限制<sup>[16]</sup>, 连续搅拌釜反应器中温度和压力的限制<sup>[17]</sup>等, 系统状态约束成为一个具有挑战性的热点问题. 近来, 构造 Barrier Lyapunov 函数使系统状态被约束在给定区域内的方法得到大量应用<sup>[18-19]</sup>. 另一方面, 不同于渐近稳定理论, 有限时间稳定能够保证系统内的变量在有限时间内快速收敛于平衡点, 使系统拥有更好的瞬态特性. 对于大多数工程应用, 需要系统在有限时间内达到期望性能, 因此有限时间控制格外重要. 近年, 有限时间控制问题取得了巨大的进展, 许多新的控制方法应运而生<sup>[20-21]</sup>.

由于测量和计算等的延迟, 输入时滞现象常见于化工生产、生物反应器等工业生产中, 因此许多研究输入时滞的文献应运而生<sup>[22-24]</sup>. 然而研究全状态约束系统的输入时滞问题的文献还比较少. 在此基础上,

收稿日期: 2020-10-22.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(61803208)、江苏省自然科学基金青年基金项目(BK20180726).

通讯作者: 刘文慧, 博士, 副教授, 研究方向: 非线性控制、智能控制. E-mail: liuwenhui1211@163.com

本文研究了具有输入时滞不确定非线性系统的有限时间全状态约束跟踪控制问题. 设计过程中利用 Barrier Lyapunov 函数和 pade 近似法解决了状态约束和输入时滞问题, 再利用反步控制技术和有限时间控制方法设计了一个新的自适应控制器. 本文主要贡献为:

- (1) 在有限时间控制系统中引入全状态约束并在反步设计过程中使用 Barrier Lyapunov 函数使系统内所有的状态都不超过给定的范围;
- (2) 在全状态约束非线性系统中考虑了输入时滞并使用 pade 近似法解决其对系统性能的负面影响;
- (3) 在系统含有未知参数时, 会给系统带来性能的恶化甚至导致系统不稳定. 为了消除其负面影响, 需要应用新的自适应控制方法, 这给控制器的设计带来困难. 而本文在控制器设计过程中, 根据控制结果所需为系统的未知参数设计了合适的自适应律, 再利用自适应反步技术为参数化非线性系统设计了新的有限时间自适应跟踪控制器, 使闭环系统内的所有信号能在有限时间内有界, 同时输出信号追踪给定参考信号的追踪误差很小.

## 1 问题描述

考虑如下参数化非线性严格反馈系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = \theta_i^T \phi_i(\bar{x}_i) + \varphi_i x_{i+1} + d_i, \\ \dot{\bar{x}}_n = \theta_n^T \phi_n(\bar{x}_n) + \varphi_n u(t-\tau) + d_n, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T (i=1, 2, \dots, n)$  是系统状态,  $y \in \mathbf{R}$  是系统输出,  $\theta_i \in \mathbf{R}^n$  是未知常数向量,  $\phi_i(\bar{x}_i)$  是已知非线性函数向量且  $\varphi_i$  是一个已知常数,  $d_i (i=1, \dots, n)$  是有界外部干扰. 本文中所有的状态都被约束在已知的范围内.  $u(t-\tau)$  是带时滞的控制输入,  $\tau$  是非负的未知延迟.

为对系统(1)进行跟踪控制器设计和稳定性分析, 需要做出如下假设并且使用如下引理.

**假设 1** 假设参考轨迹  $y_r(t)$  和其  $j$  阶导数  $y_r^{(j)}(t) (j=1, \dots, n)$  满足  $-y_r \leq y_r(t) \leq \bar{y}_r(t)$  且  $|y_r^{(j)}(t)| \leq B_j$ , 其中  $y_r, \bar{y}_r, B_0, B_1, \dots, B_n$  是正常数且  $y_r \leq B_0 < k_{c1}, \bar{y}_r \leq B_0 < k_{c1}$ .

**假设 2** 存在常数  $\rho_i > 0$  是外部扰动  $d_i$  的上界, 即  $|d_i| \leq \rho_i$ .

**引理 1**<sup>[25]</sup> 考虑系统  $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ , 对光滑正定函数  $V(\zeta)$ , 若存在  $c > 0, 0 < l < 1$  和  $\rho > 0$  使得不等式  $\dot{V}(\zeta) \leq -cV^l(\zeta) + \rho, t \geq 0$  成立, 则该系统是半全局有限时间稳定.

**引理 2**<sup>[26]</sup> 对任意实变量  $z, \zeta$  和任意正常数  $\mu, \theta, \iota$ , 不等式  $|z|^\mu |\alpha|^\theta \leq \frac{\mu}{\mu+\theta} \iota |z|^{\mu+\theta} + \frac{\theta}{\mu+\theta} \iota^{-\frac{\mu}{\theta}} |\alpha|^{\mu+\theta}$  成立.

**引理 3**<sup>[27]</sup> 对  $z_k \in \mathbf{R}, k=1, 2, \dots, n, 0 < l < 1$ , 不等式  $\left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^l \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^l \leq n^{1-l} \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^l$  成立.

本文的控制目标是设计一个有限时间跟踪控制器, 保证系统的输出  $y(t)$  能够跟踪给定的参考信号  $y_r(t)$ , 保证所有状态不超过给定的范围且闭环系统中的所有信号在有限时间内有界.

## 2 跟踪控制器设计与稳定性分析

我们运用自适应反步技术和有限时间控制理论针对系统(1)进行跟踪控制器设计, 再使用李雅普诺夫分析法进行系统的稳定性分析.

### 2.1 跟踪控制器设计

这一部分利用自适应反步法进行控制器设计, 设计过程分为  $n$  步. 为了处理带有时滞的输入项  $u(t-\tau)$ , 本文引入 pade 近似法<sup>[28]</sup>, 系统(1)可重新表示为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = \theta_i^T \phi_i(\bar{x}_i) + \varphi_i x_{i+1} + d_i, \\ \dot{\bar{x}}_n = \theta_n^T \phi_n(\bar{x}_n) + \varphi_n x_{n+1} - \varphi_n u + d_n, \\ \dot{x}_{n+1} = 2\varphi_n \gamma u - \gamma \varphi_n x_{n+1}. \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\gamma$  是待设计参数,  $x_{n+1}$  是增加的中间变量.

首先进行如下坐标变换

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - y_r, \\ e_i = x_i - v_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n-1, \\ e_n = x_n - v_{n-1} + \frac{1}{\gamma} x_{n+1}. \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $e_1$  是跟踪误差,  $v_{i-1}$  和  $v_{n-1}$  是待设计的虚拟控制器.

第 1 步: 对跟踪误差  $e_1 = x_1 - y_r$  求导得

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r = \theta_1^T \phi_1(x_1) + \varphi_1 x_2 + d_1 - \dot{y}_r. \quad (4)$$

构建如下含有 Barrier 函数的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{r,1}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_{r,1}. \quad (5)$$

式中, 要求  $|e_1| < k_{b1}$ , 令  $k_{b1} = k_{c1} - B_0$ ,  $\tilde{\theta}_{r,1} = \hat{\theta}_{r,1} - \theta_{r,1}$ ,  $\hat{\theta}_{r,1}$  是  $\theta_{r,1}$  的估计值且  $\theta_{r,1} = \theta_1$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$  是待定矩阵. 对  $V_1$  求导得到:

$$\dot{V}_1 = \frac{e_1 [\theta_1^T \phi_1(x_1) + \varphi_1 x_2 + d_1 - \dot{y}_r]}{k_{b1}^2 - e_1^2} + \tilde{\theta}_{r,1}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{r,1}. \quad (6)$$

设计虚拟控制器为:

$$v_1 = \frac{1}{\varphi_1} \left[ \dot{y}_r - \frac{e_1^{2l-1}}{(k_{b1}^2 - e_1^2)^{l-1}} - \hat{\theta}_{r,1}^T \phi_{r,1}(x_1) - \frac{e_1}{(k_{b1}^2 - e_1^2)} \right]. \quad (7)$$

代入式(6)中得到:

$$\dot{V}_1 = -\frac{e_1^{2l}}{(k_{b1}^2 - e_1^2)^l} - \frac{e_1 \tilde{\theta}_{r,1}^T \phi_{r,1}(x_1)}{k_{b1}^2 - e_1^2} + \frac{e_1 e_2 \varphi_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} + \frac{e_1 d_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} - \left( \frac{e_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \tilde{\theta}_{r,1}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{r,1}. \quad (8)$$

根据 Young 不等式, 得到:

$$\varphi_1 \frac{e_1 e_2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{e_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi_1^2 e_2^2, \quad (9)$$

$$\frac{e_1 d_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{e_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} |d_1|^2 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{e_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_1^2. \quad (10)$$

令自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_{r,1} = \Gamma_1 \left[ \frac{e_1}{k_{b1}^2 - e_1^2} \phi_{r,1}(\bar{x}_1) - \mu_1 \hat{\theta}_{r,1} \right], \quad (11)$$

则得到不等式:

$$-\frac{e_1 \tilde{\theta}_{r,1}^T \phi_{r,1}(x_1)}{k_{b1}^2 - e_1^2} + \tilde{\theta}_{r,1}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{r,1} \leq \frac{\mu_1 (\|\theta_{r,1}\|^2 - \|\tilde{\theta}_{r,1}\|^2)}{2}. \quad (12)$$

式中,  $\phi_{r,1}(x_1) = \phi_1(x_1)$ .

定义  $z = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{r,1}\|^2$ ,  $\mu = 1 - l$ ,  $\theta = l$  和  $\iota = l^{1-l}$ , 应用引理 2, 可以得到

$$\left( \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{r,1}\|^2 \right)^l \leq (1-l)\iota + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{r,1}\|^2. \quad (13)$$

根据不等式(9)、(10)、(12)和(13), 式(8)可以重写为

$$\dot{V}_1 \leq -\left[ \frac{e_1^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right]^l - \mu_1 \left( \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{r,1}\|^2 \right)^l + \frac{1}{2} \varphi_1^2 e_2^2 + \frac{1}{2} \rho_1^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \|\theta_{r,1}\|^2 + \mu_1 (1-l)\iota. \quad (14)$$

显然当  $|e_1| < k_{b1}$  时,  $\ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \leq \frac{e_1^2}{k_{b1}^2 - e_1^2}$ , 则能证明当  $0 < l < 1$  时  $\left[ \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right]^l \leq \left[ \frac{e_1^2}{k_{b1}^2 - e_1^2} \right]^l$  成立, 即可得

$$\dot{V}_1 \leq -\sigma_{1,1} V_1^l + \sigma_{1,2} + \frac{1}{2} \varphi_1^2 e_2^2 + \frac{1}{2} \rho_1^2, \quad (15)$$

式中,  $\sigma_{1,1} = \min\{2^l, \mu_1 \lambda_{\min}(\Gamma_1)\}$ ,  $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\mu_1 \|\theta_{r,1}\|^2 + \mu_1(1-l)\iota$ .

**注 1** 在设计 Lyapunov 函数时加入了 Barrier 函数,使状态  $x_1$  被限定在预定范围内. 在接下来的步骤中,我们用了同样的方法来确保状态约束能够满足.

第  $i(i=2,3,\dots,n-1)$  步:计算误差变量  $e_i$  导数得到:

$$\dot{e}_i = \theta_{r,i}^T \phi_{r,i}(\bar{x}_i) - \tilde{\omega}_{i-1} + d_i + \varphi_i x_{i+1}, \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i-1} &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_k} [\theta_k^T \phi_k(\bar{x}_k) + \varphi_k x_{k+1}] + \tilde{\omega}_{i-1}, \\ \tilde{\omega}_{i-1} &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial v_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{r,k}} \dot{\hat{\theta}}_{r,k} + \sum_{k=1}^i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)}, \\ \theta_{r,i} &= [\theta_i^T, \theta_{i-1}^T, \dots, \theta_1^T, \varphi_{i-1}, \varphi_{i-2}, \dots, \varphi_1]^T, \\ \phi_{r,i}(\bar{x}_i) &= \left[ \phi_i(\bar{x}_i), -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \phi_{i-1}(\bar{x}_{i-1}), \dots, -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_1} \phi_1(x_1), -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{i-1}} x_i, \dots, -\frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_1} x_2 \right]^T. \end{aligned}$$

与第 1 步相似,构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_i = \frac{1}{2} \ln \frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2 - e_i^2} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{r,i}^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_{r,i}, \quad (17)$$

式中,  $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$  是待设计矩阵,  $\tilde{\theta}_{r,i} = \hat{\theta}_{r,i} - \theta_{r,i}$ ,  $\hat{\theta}_{r,i}$  是  $\theta_{r,i}$  的估计值. 要求  $|e_i| < k_{bi}$ , 且  $k_{bi}$  之后会给出. 在集合  $\Omega_{e_i} = \{e_i : |e_i| < k_{bi}\}$  中,  $V_i$  是连续的,对其求导得:

$$\dot{V}_i = \frac{e_i [\theta_{r,i}^T \phi_{r,i}(\bar{x}_i) + \varphi_i x_{i+1} + d_i - \tilde{\omega}_{i-1}]}{k_{bi}^2 - e_i^2} + \tilde{\theta}_{r,i}^T \Gamma_i^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{r,i}. \quad (18)$$

设计虚拟控制器和自适应律为

$$v_i = \frac{1}{\varphi_i} \left[ -\frac{e_i^{2l-1}}{(k_{bi}^2 - e_i^2)^{l-1}} \hat{\theta}_{r,i}^T \phi_{r,i}(x_i) + \tilde{\omega}_{i-1} - \frac{e_i}{k_{bi}^2 - e_i^2} - \frac{\varphi_{i-1}^2 e_i (k_{bi}^2 - e_i^2)}{2} \right], i=2,3,\dots,n-1, \quad (19)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{r,i} = \Gamma_i \left[ \frac{e_i}{k_{bi}^2 - e_i^2} \phi_{r,i}(\bar{x}_i) - \mu_i \hat{\theta}_{r,i} \right], i=1,2,\dots,3. \quad (20)$$

式中,  $\mu_i > 0 (i=1,2,\dots,n)$  是待设计参数.

$$\dot{V}_i \leq -\left[ \frac{e_i^2}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right]^l - \mu_i \left( \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{r,i}\|^2 \right)^l + \frac{1}{2} \varphi_i^2 e_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \rho_i^2 - \frac{1}{2} \varphi_{i-1}^2 e_i^2 + \frac{1}{2} \mu_i \|\theta_{r,i}\|^2 + \mu_i(1-l)\iota. \quad (21)$$

根据第 1 步中的步骤可得:

$$\dot{V}_i \leq -\sigma_{i,1} V_i^l + \sigma_{i,2} + \frac{1}{2} \varphi_i^2 e_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \rho_i^2 - \frac{1}{2} \varphi_{i-1}^2 e_i^2. \quad (22)$$

式中,  $\sigma_{i,1} = \min\{2^l, \mu_i \lambda_{\min}(\Gamma_i)\}$ ,  $\sigma_{i,2} = \frac{1}{2}\mu_i \|\theta_{r,i}\|^2 + \mu_i(1-l)\iota$ .

第  $n$  步:对  $e_n = x_n - v_{n-1} + \frac{1}{\gamma} x_{n+1}$  求得:

$$\dot{e}_n = \theta_n^T \phi_n(\bar{x}_n) + \varphi_n x_{n+1} - \varphi_n u(t) + d_n - \dot{v}_{n-1} + 2\varphi_n u(t) - \varphi_n x_{n+1} = \theta_n^T \phi_n(\bar{x}_n) + \varphi_n u(t) - \dot{v}_{n-1} + d_n, \quad (23)$$

式中,  $\dot{v}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_k} [\theta_k^T \phi_k(\bar{x}_k) + \varphi_k x_{k+1}] + \tilde{\omega}_{n-1}$ ,  $\tilde{\omega}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_{r,k}} \dot{\hat{\theta}}_{r,k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)}$ . 则式(23)可写成

$$\dot{e}_n = \theta_{r,n}^T \phi_{r,n}(\bar{x}_n) - \tilde{\omega}_{n-1} + \varphi_n u(t) + d_n. \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} \theta_{r,n} &= [\theta_n^T, \theta_{n-1}^T, \dots, \theta_1^T, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_1]^T, \\ \phi_{r,n}(\bar{x}_n) &= \left[ \phi_n(\bar{x}_n), -\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \phi_{n-1}(\bar{x}_{n-1}), \dots, -\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1} \phi_1(x_1), -\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_{n-1}} x_n, -\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_{n-2}} x_{n-1}, \dots, -\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1} x_2 \right]^T. \end{aligned}$$

设计实际控制器和自适应律为

$$u = \frac{1}{\varphi_n} \left[ -\frac{e_n^{2l-1}}{(k_{bn}^2 - e_n^2)^{l-1}} \hat{\theta}_{r,n}^T \phi_{r,n}(x_n) + \tilde{\omega}_{n-1} - \frac{\varphi_{n-1}^2 e_n (k_{bn}^2 - e_n^2)}{2} - \frac{e_n}{(k_{bn}^2 - e_n^2)} \right], \quad (25)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{r,n} = \Gamma_n \left[ \frac{e_n}{k_{bn}^2 - e_n^2} \phi_{r,n}(\bar{x}_n) - \mu_n \hat{\theta}_{r,n} \right]. \quad (26)$$

式中,  $\Gamma_n = \Gamma_n^T > 0$  是待定矩阵,  $\tilde{\theta}_{r,n} = \hat{\theta}_{r,n} - \theta_{r,n}$ ,  $\hat{\theta}_{r,n}$  是  $\theta_{r,n}$  的估计值.

## 2.2 稳定性分析

本节给出以下定理来说明本文的主要结果. 如下文所示是有限时间稳定的证明.

**定理 1** 对于具有输入时滞、有界外部干扰和全状态约束的严格反馈参数化非线性系统(1), 如果在假设 1 和假设 2 下使用控制器(25), 则该闭环系统是半全局有限时间稳定的.

**证明** 设计如下 Lyapunov 函数:

$$V_n = \frac{1}{2} \ln \frac{k_{bn}^2}{k_{bn}^2 - e_n^2} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{r,n}^T \Gamma_n^{-1} \tilde{\theta}_{r,n}. \quad (27)$$

式中,  $k_{bn}$  之后会给出. 在集合  $\Omega_{e_n} = \{e_n : |e_n| < k_{bn}\}$  中,  $V_n$  是连续的, 对其求导得:

$$\dot{V}_n = \frac{e_n}{k_{bn}^2 - e_n^2} [\theta_{r,n}^T \phi_{r,n}(\bar{x}_n) - \tilde{\omega}_{n-1} + d_n + \varphi_n u(t)] + \tilde{\theta}_{r,n}^T \Gamma_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{r,n}. \quad (28)$$

类似于之前的步骤, 将实际控制器  $u$  和自适应律代入可以得到:

$$\dot{V}_n \leq -\sigma_{n,1} V_n^l + \sigma_{n,2} - \frac{1}{2} \varphi_{n-1}^2 e_n^2 + \frac{1}{2} \rho_n^2. \quad (29)$$

式中,  $\sigma_{n,1} = \min\{2^l, \mu_n \lambda_{\min}(\Gamma_n)\}$ ,  $\sigma_{n,2} = \frac{1}{2} \mu_n \|\theta_{r,n}\|^2 + \mu_n(1-l)\iota$ .

定义  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  且应用引理 3 得到:

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^n \sigma_{i,1} V_i^l + \sum_{i=1}^n \sigma_{i,2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i^2 \leq -\sigma_1 V^l + \sigma_2. \quad (30)$$

式中,  $\sigma_1 = \min\{\sigma_{i,1}\}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $\sigma_2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{i,2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i^2$ .

所以根据引理 1, 可以得到系统(1)是半全局有限时间稳定.

**注 2** 根据以上证明, 显然  $|x_1| \leq |e_1| + |y_r(t)| < k_{b1} + B_0$ . 定义  $k_{b1} = k_{c1} - B_0$ , 则  $|x_1| < k_{c1}$ . 存在常数  $\varepsilon_i > 0$  使  $|v_i| < \varepsilon_i$ , 因此  $|x_i| \leq |e_i| + |v_{i-1}| \leq \varepsilon_{i-1} + k_{bi}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 定义  $k_{bi} = k_{ci} - \varepsilon_{i-1}$ , 则  $|x_i| < k_{ci}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 所以系统的所有状态都有效地被约束在给定的区域内.

## 3 仿真算例

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \theta_1^T x_1^2 - x_2 + d_1, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2^T [\sin(x_1), x_1]^T + 2u + d_2, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (31)$$

式中,  $u$  和  $y$  是系统的输入和输出,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  是未知常数向量.

在仿真中选择  $\theta_1 = 0.1$ ,  $\theta_2 = [0.2, 1]^T$ , 外部扰动为  $d_1 = 0.02 \cos(0.5t)$ ,  $d_2 = 0.06 \sin(t + 0.25)$ , 输入延迟选择为  $\tau = 0.1$ .

选择仿真初始条件为  $x_1(0) = 0.13$ ,  $x_2(0) = 0.13$ ,  $\hat{\theta}_{r,1} = 0.1$ ,  $\hat{\theta}_{r,2} = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T$ . 参考信号为  $y_r = 0.01 \cos(0.5(t-1))$ . 设计参数选择  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 6$ ,  $l = 0.9$ ,  $k_{c1} = 0.39$ ,  $k_{c2} = 1.1$ ,  $\Gamma_1 = 2$ ,  $\Gamma_2 = \text{diag}(2, 2, 2, 2)$ .

仿真结果如图 1-图 4 所示. 图 1 表示系统输出信号  $y$  与跟踪信号  $y_r$  的轨迹, 图 2 表示跟踪误差  $e_1$  的仿真结果. 由图 1 和图 2 可以看出系统跟踪性能良好且系统状态  $x_1$  不超出预定界限. 图 3 表示系统状态  $x_2$  保持在预定界限内. 图 4 表明自适应律是有界的. 以上结果都证明本文提出的新的跟踪控制器能够在

有限时间内使系统达到预期.

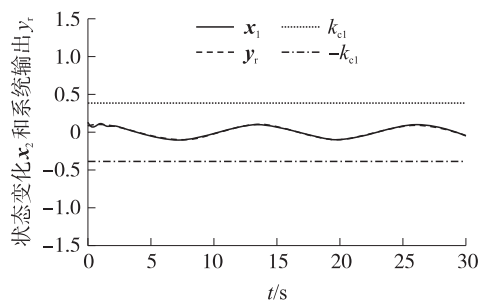


图 1  $y(t)$  和  $y_r(t)$  的轨迹

Fig. 1 Trajectories of  $y(t)$  and  $y_r(t)$

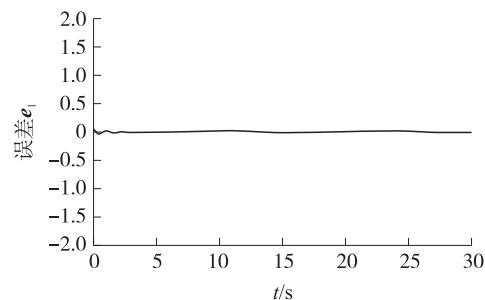


图 2 误差  $e_1$  的轨迹

Fig. 2 Trajectory of error  $e_1$

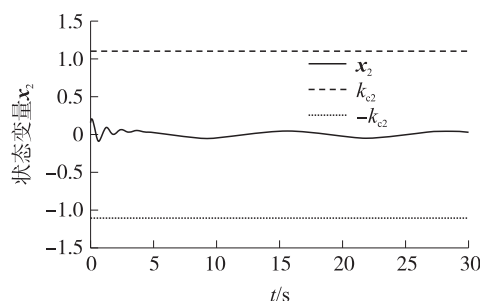


图 3  $x_2(t)$  的轨迹

Fig. 3 Trajectory of  $x_2(t)$

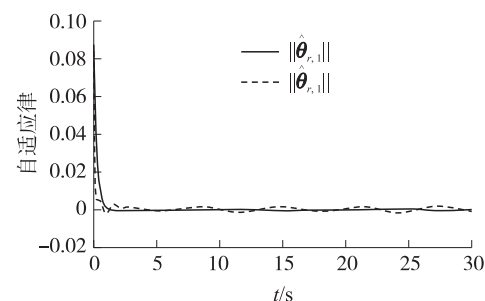


图 4 自适应律  $\|\hat{\theta}_{r,1}\|$  和  $\|\hat{\theta}_{r,2}\|$  的轨迹

Fig. 4 Trajectories of adaptive laws  $\|\hat{\theta}_{r,1}\|$  and  $\|\hat{\theta}_{r,2}\|$

## 4 结论

本文针对具有输入时滞、有界外部干扰和全状态约束参数化非线性系统设计了一种新的有限时间自适应追踪控制器. 为了消除输入迟滞的影响, 使用了 pade 近似法. 应用一些引理确保系统能在有限时间内达到预期效果. 此外, 利用自适应反步技术和 Barrier Lyapunov 函数推导出自适应控制器使系统输出信号追踪给定参考信号并保证系统状态被约束在给定区域内且保证系统所有信号都在有限时间内有界. 最后, 通过仿真实例验证了本文提出的控制器的有效性.

## [参考文献] (References)

- [1] NGO Q H, HONG K S. Adaptive sliding mode control of container cranes[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(5): 662-668.
- [2] TANAKA K, WANG H O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001.
- [3] GE S S, WANG C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. Automatica, 2002, 38(4): 671-682.
- [4] CHEN Q, REN X M, NA J, et al. Adaptive robust finite-time neural control of uncertain PMSM servo system with nonlinear dead zone[J]. Neural Computing & Applications, 2017, 28(12): 3725-3736.
- [5] LI Y X, YANG G H. Observer-based adaptive fuzzy quantized control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 371: 61-77.
- [6] WEN G, CHEN C L P, LIU Y J, et al. Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2151-2160.
- [7] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear control without overparametrization[J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(3): 177-185.
- [8] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 36(11): 1241-1253.
- [9] 唐丽, 贾继阳. 具有输入饱和的严格反馈系统的约束控制[J]. 建模与仿真, 2019, 8(3): 102-116.

- [10] LV L N, SUN Z Y, XIE X J. Adaptive control for high-order time-delay uncertain nonlinear system and application to chemical reactor system[J]. International Journal of Adaptive Control & Signal Processing, 2015, 29(2): 224–241.
- [11] WEN C Y, ZHOU J, WANG W. Decentralized adaptive backstepping stabilization of interconnected systems with dynamic input and output interactions[J]. Automatica, 2009, 45(1): 55–67.
- [12] MU C X, ZHANG Y, WANG K. Observer-based adaptive control of uncertain nonlinear systems via neural networks[J]. IEEE Access, 2018, 6: 42675–42686.
- [13] 张绍杰, 吴雪, 刘春生. 执行器故障不确定非线性系统最优自适应输出跟踪控制[J]. 自动化学报, 2018, 44(12): 2188–2197.
- [14] WANG M L, ZHANG Z. Globally adaptive asymptotic tracking control of nonlinear systems using nonlinearly parameterized fuzzy approximator[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(7): 2783–2795.
- [15] LIU W H, HO D W C, XU S Y, et al. Adaptive finite-time stabilization of a class of quantized nonlinearly parameterized systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(9): 4554–4573.
- [16] HE W, CHEN Y H, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 46(3): 620–629.
- [17] LI D P, LI D J. Adaptive controller design-based neural networks for output constraint continuous stirred tank reactor[J]. Neurocomputing, 2015, 153(4): 159–163.
- [18] LIU Y J, TONG S. Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full state constrained nonlinear systems[J]. Automatica, 2017, 76: 143–152.
- [19] JIN X. Adaptive fault tolerant control for a class of input and state constrained MIMO nonlinear systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(2): 286–302.
- [20] LV W S, WANG F, LI Y. Adaptive finite-time tracking control for nonlinear systems with unmodeled dynamics using neural networks[J]. Advances in Difference Equations, 2018, 159: 1369.
- [21] LI H Y, ZHAO S Y, HE W, et al. Adaptive finite-time tracking control of full state constrained nonlinear systems with dead-zone[J]. Automatica, 2019, 100: 99–107.
- [22] 黄亚欣, 张星慧, 蒋蒙蒙. 带有输入和状态时滞的高阶非线性前馈系统的自适应控制[J]. 自动化学报, 2017, 43(7): 1273–1279.
- [23] KRSTIC M. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(2): 287–303.
- [24] 齐晓静, 刘文慧. 基于扰动观测器的时滞非线性系统的跟踪控制[J]. 南京师范大学学报(工程技术版), 2020, 20(77): 7–13.
- [25] WANG F, CHEN B, LIN C, et al. Adaptive neural network finite-time output feedback control of quantized nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(6): 1839–1848.
- [26] QIAN C J, LIN W. Non-Lipchitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization[J]. System & Control Letters, 2001, 42(3): 185–200.
- [27] WANG F, CHEN B, LIU X P, et al. Finite-time adaptive fuzzy tracking control design for nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(3): 1207–1216.
- [28] NA J, REN X M, SHANG C, et al. Adaptive neural network predictive control for nonlinear pure feedback systems with input delay[J]. Journal of Process Control, 2012, 22(1): 194–206.

[责任编辑:陈 庆]