

# 控制方向未知的非线性系统有限时间跟踪控制

孟 波, 刘文慧

(南京师范大学南瑞电气与自动化学院, 江苏 南京 210023)

**[摘要]** 研究了一类具有输入死区以及控制方向未知的严格反馈非线性系统有限时间输出反馈跟踪控制问题. 首先, 通过坐标变换, 将所研究的控制方向未知的非线性系统转化为控制增益已知的等效系统. 然后, 设计了一个模糊状态观测器来逼近不可测的状态, 引入 Nussbaum 函数来解决控制方向未知的困难. 基于模糊状态观测器, 通过反步法利用变换后的系统间接得到原系统的控制器. 此外, 该控制器可以保证跟踪误差在有限时间内收敛于原点的一个小邻域, 且闭环系统中的所有信号都保持有界. 最后, 通过一个仿真算例验证了该控制方法的可行性和有效性.

**[关键词]** 状态观测器, 控制方向未知, 有限时间跟踪控制, 模糊逻辑系统, 死区

**[中图分类号]** TP13 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2021)03-0033-09

## Finite-time Tracking Control of Nonlinear Systems with Unknown Control Directions

Meng Bo, Liu Wenhui

(NARI School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** This paper concentrates on the finite-time output feedback tracking control problem for a class of strict-feedback nonlinear systems with input dead zone and unknown control directions. Firstly, the nonlinear system with unknown control directions is transformed into an equivalent system with known control gain by coordinate transformation. Then, a fuzzy state observer is designed to approximate the unmeasurable state, and Nussbaum function is introduced to solve the problem of unknown control directions. Based on the fuzzy state observer, the controller of the original system is obtained indirectly by backstepping method with the use of transformed system. In addition, the controller can ensure that the tracking error converges to a small neighborhood of the origin in finite-time, and that all signals in the closed-loop system remain bounded. Finally, a simulation example is given to demonstrate the feasibility and effectiveness of the control method.

**Key words:** state observer, unknown control directions, finite-time tracking control, fuzzy logic systems, dead zone

近年来,非线性系统有限时间稳定控制问题受到了国内外学者广泛的关注.从工程实践的角度来看,有限时间稳定性比渐近时间稳定性更有意义,比如行驶中的汽车制动问题.线性系统的有限时间控制问题是由 Tang<sup>[1]</sup>所提出,该方法是更优于线性滑膜方法的终端滑膜方法. Lyapunov 有限时间稳定性理论很好地解决了在非线性系统中由滑模控制器引起的抖振问题<sup>[2]</sup>. 近年来, Lyapunov 有限时间稳定性理论的应用愈发广泛<sup>[3-6]</sup>. Li 等<sup>[7]</sup>对一类多输入多输出的非严格反馈非线性系统结合反步法和动态面控制设计了有限时间控制器. 在现实生活中,船只航向、航空航天等的自动控制问题广泛涉及到控制方向未知的非线性系统,但是上述文献[3-7]并没有讨论当非线性系统控制方向未知时的控制问题. 在这一领域具有开拓性意义的是 Nussbaum<sup>[8]</sup>提出的利用 Nussbaum 函数解决控制方向未知这一难题的方法,该方法至今仍是解决控制方向未知问题的主要方法. 文献[9-10]都是通过坐标变换将原系统转换为控制增益已知的新系统后设计了状态观测器应用 Nussbaum 函数和反步法来设计控制器,所不同的是前者设计的是线性观测器而后者设计的是模糊状态观测器. 文献[11-12]都利用了 Nussbaum 函数和动态面控制思想分别解决了

收稿日期:2020-11-27.

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(61803208)、江苏省自然科学基金青年基金项目(BK20180726).

通讯作者:刘文慧,博士,副教授,研究方向:非线性控制、智能控制. E-mail:liuwenhui1211@163.com

系统控制增益符号未知的问题以及“计算膨胀”现象. 但是上述文献[8-12]并没有考虑有关控制方向未知的非线性系统的有限时间控制问题.

鉴于此, Ma 等<sup>[13]</sup>针对一类具有执行器故障和未知控制方向的非线性系统设计了控制器, 并且可以保证该系统全局有限时间镇定. Wu 等<sup>[14]</sup>针对多未知控制方向的非线性系统提出了一种全局有限时间控制策略, 文献[15]在文献[14]的基础上对于多未知控制方向非线性系统增加了未知参数并设计了全局有限时间控制器. 但是上述文献[12-15]都基于系统状态向量可测情形. 另一方面, 作为控制系统中常见的非线性问题, 死区往往会降低系统的控制性能, 甚至导致控制系统的不稳定<sup>[16-19]</sup>.

对于一类控制方向未知的不确定非线性系统的有限时间自适应输出反馈跟踪控制问题, 本文主要做以下工作:

(1) 针对文献[3-7]中系统均为控制方向已知, 本文假设系统控制方向未知并借助 Nussbaum 函数来解决.

(2) 对比文献[8-12]没有考虑有关控制方向未知的非线性系统的有限时间控制问题, 本文对于此类系统设计了一种新的有限时间控制器.

(3) 对于文献[12-15]的控制器是基于系统状态反馈设计的, 本文对此条件进行了放宽, 以此提出的控制策略可以更广泛地应用于工程实践.

## 1 问题描述、预备知识和模糊逻辑系统

### 1.1 问题描述

考虑下面严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = s_i x_{i+1} + f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + d_i(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_n = s_n H(v) + f_n(\bar{\mathbf{x}}_n) + d_n(t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$  表示状态向量,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $y \in \mathbf{R}$  是系统输出.  $f_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$  是未知光滑非线性函数,  $s_i$  为未知常数,  $d_i(t)$  表示有界的外部干扰.  $v$  是待设计控制输入信号,  $H(v)$  为死区输出. 为了便于控制系统的设计, 死区  $H(v)$  特性表示为<sup>[19]</sup>:

$$H(v) = \begin{cases} \mu_1(v - \gamma_1), & v \geq \gamma_1, \\ 0, & -\gamma_2 \leq v \leq \gamma_1, \\ \mu_2(v + \gamma_2), & v \leq -\gamma_2. \end{cases} \quad (2)$$

式中, 参数  $\mu_1, \mu_2, \gamma_1$  和  $\gamma_2$  是未知常数,  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$  表示输入非线性的断点, 假设存在正常数  $\check{\mu}, \hat{\mu}$ , 满足  $\check{\mu} < \mu_1 < \hat{\mu}, \check{\mu} < \mu_2 < \hat{\mu}$ , 则  $H(v)$  可以表示为:

$$H(v) = \mu(t)v + \Delta(t). \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \begin{cases} \mu_1 \gamma_1, & v \geq \gamma_1, \\ 0, & -\gamma_2 \leq v \leq \gamma_1, \\ \mu_2 \gamma_2, & v \leq -\gamma_2. \end{cases} \\ \mu(t) &= \begin{cases} \mu_1, & v \geq \gamma_1, \\ 0, & -\gamma_2 \leq v \leq \gamma_1, \\ \mu_2, & v \leq -\gamma_2. \end{cases} \end{aligned}$$

然后可以得到:

$$\begin{cases} 0 < \check{\mu} < \mu(t) < \hat{\mu}, \\ |\Delta(t)| \leq \Delta_0 = \max\{\hat{\mu}|\gamma_1|, \hat{\mu}|\gamma_2|\}. \end{cases} \quad (4)$$

**假设 1** 存在未知正常数  $\bar{d}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 有  $|d_i| \leq \bar{d}_i$ .

**假设 2** 参考信号  $y_r$  和它的  $n$  阶导数均是分段连续,已知且有界的.

## 1.2 预备知识

**引理 1**<sup>[20]</sup> 存在正定函数  $V(\xi)$  和常数  $c>0, 0<\beta<1, \chi>0, a<b\leq 1$ . 若非线性系统  $\dot{\xi}=f(\xi)$  满足  $\dot{V}(\xi)\leq -cV^\beta(\xi)+\chi$ , 则非线性系统  $\xi=f(\xi)$  是半全局实际有限时间稳定.  $T_{\text{reach}}=\frac{1}{(1-\beta)bc}\left[V^{1-\beta}(\xi(0))-\left(\frac{\chi}{(1-b)c}\right)^{(1-\beta)/\beta}\right]$  定义为到达时间,其中  $V(\xi(0))$  是  $V(\xi)$  的初值.

**引理 2**<sup>[20]</sup> 对于任意的正常数  $\mu, \tau, \kappa$  和实变量  $e, \ell$  有不等式  $|e|^\mu |\ell|^\tau \leq \frac{\mu}{\mu+\tau} \kappa |e|^{\mu+\tau} + \frac{\tau}{\mu+\tau} \kappa^\frac{\mu}{\tau} |\ell|^{\mu+\tau}$  成立.

**引理 3**<sup>[20]</sup> 对于微分方程  $\dot{\zeta}(t)=-\vartheta\zeta(t)+\rho\phi(t)$ , 其中  $\vartheta>0, \rho>0$  是常数,  $\phi(t)$  是正函数. 若对所有的  $t\geq t_0, \phi(t)\geq 0$ , 且在初始条件  $\zeta(t_0)\geq 0$  时,  $\zeta(t)\geq 0$  成立.

应用 Nussbaum 类型的函数性质来解决控制方向未知的问题  $s_i, i=1, 2, \dots, n$ . 其性质为  $\limsup_{s\rightarrow\infty} \frac{1}{s} \times \int_0^s N(\eta) d\eta = \infty, \liminf_{s\rightarrow\infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\eta) d\eta = -\infty$ , 本文选用  $\exp(\eta^2) \cos((\pi/2)\eta)$  作为 Nussbaum 函数.

**引理 4**<sup>[9]</sup> 设  $V(t)\geq 0$  且  $\eta(t)$  是定义在  $[0, t_f]$  上的光滑函数, 同时函数  $N(\eta)$  是一个光滑 Nussbaum 类型的偶函数. 则有不等式  $V(t)\leq l_0 + e^{-l_1 t} \int_0^t [g(\tau)N(\eta)+1] \eta e^{l_1 \tau} d\tau$  成立, 其中  $l_0$  和  $l_1$  是正常数,  $g(t)$  是一个变量, 满足  $g(t)\in [m_1, m_2]$ , 其中  $0<m_1<m_2$  或者  $m_1<m_2<0, m_1, m_2$  为常数, 则  $V(t), \eta(t), \int_0^t [g(\tau)N(\eta)+1] \eta d\tau$  在  $[0, t_f]$  上均有界.

## 1.3 模糊逻辑系统

系统中的未知非线性项用模糊逻辑系统描述如下, IF-THEN 规则:

**R<sub>l</sub>**: 如果  $x_1$  是  $B_1^l, x_2$  是  $B_2^l, \dots, x_n$  是  $B_n^l$ , 则  $y_A$  为  $A^l, l=1, 2, \dots, N$  其中  $B_i^l$  和  $A^l$  分别是与模糊函数  $\mu_{B_i^l}(x_i)$  和  $\mu_{A^l}(y_A)$  相关的模糊集,  $N$  是模糊规则数. 通过单点模糊化、中心加权平均解模糊化、乘积推理, 模

糊逻辑系统为  $y_A(x) = \frac{\sum_{l=1}^N \bar{\phi}_l \prod_{i=1}^n \mu_{B_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^N [\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^l}(x_i)]}$ , 其中  $\bar{\phi}$  满足  $\mu_{A^l}(\bar{\phi}_l) = \max\{\mu_{A^l}(y_A) | y_A \in \mathbf{R}\}$ .

定义模糊基函数为  $\varphi_l = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^N [\prod_{i=1}^n \mu_{B_i^l}(x_i)]}$  令  $\theta = [\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N]^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T, \varphi^T(x) = [\varphi_1(x),$

$\varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)]$  则模糊逻辑系统可以表示为:  $y_A(x) = \theta^T \varphi(x)$ .

**引理 5**<sup>[20]</sup> 对于任意给定的常数  $\Xi>0$ , 在紧集  $\Omega$  内定义连续函数  $f(x)$ , 有  $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x) - \theta^T \varphi(x)| \leq \Xi$  成立.

## 2 模糊状态观测器设计

对系统(1)进行坐标变换由  $\xi_i = T_i x_i, T_i = \prod_{j=i}^n s_j^{-1}$ , 原系统转变为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1} + g_i(\bar{\xi}_i) + D_i(t), \\ \dot{\xi}_n = H(v) + g_n(\bar{\xi}_n) + D_n(t), \\ y = \psi \xi_1. \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $1\leq i\leq n-1, \bar{\xi}_i = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i]^T, g_i(\bar{\xi}_i) = T_i f_i(\bar{x}_i), D_i(t) = T_i d_i(t), \psi = \prod_{j=1}^n s_j \neq 0$ .

**假设 3** 在系统(1)中,  $s_i$  的符号是未知的, 且  $s_i \neq 0, i=1, 2, \dots, n, \psi = \prod_{j=1}^n s_j \neq 0$  是已知的.

从假设 1 可得, 存在一个未知正常数  $\bar{D}_i$  有  $|D_i|^2 \leq \bar{D}_i$ , 将系统 (5) 写成状态空间形式:

$$\xi = A\xi + \sum_{i=1}^n B_i [g_i(\bar{\xi}_i) + D_i] + BH(v) + K\xi_1. \quad (6)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ \vdots \\ -k_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, B_i = [0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0]^T.$$

选择向量  $\mathbf{K}, \mathbf{A}$  是一个严格 Hurwitz 矩阵, 对于任意给定的正定对称矩阵  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ , 有正定矩阵  $\mathbf{P}$  满足等式  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\mathbf{Q}$ . 假设原系统只有输出信号  $y$  是可测的, 因此设计一个模糊状态观测器来估计不可测的状态. 定义  $g_i(\bar{\xi}_i | \theta_i) = \theta_i^T \varphi_i(\bar{\xi}_i)$ ,  $\hat{g}_i(\hat{\xi}_i | \theta_i) = \theta_i^T \varphi_i(\hat{\xi}_i)$  其中  $\hat{\xi}_i = [\hat{\xi}_{i1}, \hat{\xi}_{i2}, \dots, \hat{\xi}_{in}]^T$  是  $\bar{\xi}_i = [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}]^T$  的估计, 定义变量误差  $\delta_i$  和  $\varepsilon_i$  分别为  $\delta_i = g_i(\bar{\xi}_i) - \hat{g}_i(\hat{\xi}_i | \theta_i)$ ,  $\varepsilon_i = g_i(\bar{\xi}_i) - \hat{g}_i(\hat{\xi}_i | \theta_i^*)$  其中  $\theta_i^*$  是最优参数向量. 定义  $\delta'_i = \delta_i + D_i$ ,  $\varepsilon'_i = \varepsilon_i + D_i$  存在常数  $\bar{\delta}_i$  和  $\bar{\varepsilon}_i$ , 有  $|\varepsilon'_i| \leq \bar{\varepsilon}_i$ ,  $|\delta'_i| \leq \bar{\delta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 将模糊状态观测器设计为:

$$\hat{\xi}^* = A\hat{\xi} + \sum_{i=1}^n B_i \hat{g}_i(\hat{\xi}_i | \theta_i) + BH(v) + K\xi_1. \quad (7)$$

令  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n]^\top$  为观测器误差, 根据 (6) 和 (7) 可得  $\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + \delta$ , 其中  $\delta = \sum_{i=1}^n B_i [g_i(\tilde{\xi}_i) - \hat{g}_i(\tilde{\xi}_i | \theta_i) + D_i] = \sum_{i=1}^n B_i [\delta_i + D_i] = [\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n]$ , 令  $\bar{\delta} = \|\delta\|^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i'^2$ . 选择 Lyapunov 函数为:

$$V_0 = \frac{1}{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{P} \tilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (8)$$

由  $A^T P + P A = -2Q$ ,  $\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + \delta$  以及 Young 不等式可得  $V_0$  的导数满足下式:

$$\dot{V}_0 \leq - \left[ \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - \frac{1}{2} \right] \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\boldsymbol{\delta}\|^2. \quad (9)$$

**注 1** 可以看到在系统(5)中,所有的控制增益都是已知的. 由于(5)由原系统(1)通过线性变换所得,所以(5)中所有的状态都是不可知的. 因此,本文设计了一个模糊状态观测器来估计(5)中不可测的状态,然后基于此观测器提出了一种新的有限时间控制策略.

### 3 控制器设计和稳定性分析

### 3.1 控制器设计

提出一种基于反步法的自适应有限时间控制方案, 跟踪误差  $z_i$  以及 Lyapunov 函数分别为:

$$z_1 = y - y_r, \quad (10)$$

$$z_i = \hat{\xi}_i - \alpha_{i-1}, i = 2, \cdots, n, \quad (11)$$

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2 + \frac{1}{2a_i}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i, i=1,2,\cdots,n. \quad (12)$$

式中,  $y_r$  是参考信号,  $\alpha_i$  是虚拟控制信号,  $\tilde{\theta}_i = \theta_i^* - \theta_i$ ,  $q_i > 0$  是待设计参数.

第1步:由(5)、(10)计算跟踪误差导数为下式,其中  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + D_1$ ,

$$\dot{z}_1 = \psi(\tilde{\xi}, z_2 + \alpha_1 + \theta_1^{*T} \varphi_1(\hat{\xi}_1) + \varepsilon'_1) + \tilde{\theta}_1^T \varphi_1(\hat{\xi}_1) + \theta_1^T \varphi_1(\hat{\xi}_1) - \theta_1^{*T} \varphi_1(\hat{\xi}_1) - \dot{y}_r. \quad (13)$$

由(12)、(13)计算  $V_1$  的导数为:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + z_1 \psi z_2 + z_1 (\psi(\tilde{\xi}_2 + \alpha_1 + \theta_1^{*\top} \varphi_1(\hat{\xi}_1) + \varepsilon'_1) + \theta_1^\top \varphi_1(\hat{\xi}_1) - \theta_1^{*\top} \varphi_1(\hat{\xi}_1) - \dot{y}_r) + \frac{1}{q_1} \tilde{\theta}_1^\top (q_1 z_1 \varphi_1(\hat{\xi}_1) - \dot{\theta}_1). \quad (14)$$

应用 Young 不等式且由  $\varphi_1^T(\hat{\xi}_1)\varphi_1(\hat{\xi}_1) < 1$  可得:

$$z_1\psi(\tilde{\xi}_2+\theta_1^{*T}\varphi_1(\hat{\xi}_1)+\varepsilon'_1)\leq\frac{3}{2}\psi^2z_1^2+\frac{1}{2}\|\tilde{\xi}\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\|\theta_1^*\|^2. \quad (15)$$

$$z_1\theta_1^{*T}\varphi_1(\hat{\xi}_1)\leq\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{2}\|\theta_1^*\|^2. \quad (16)$$

将(15)、(16)代入(14)可得:

$$\dot{V}_1\leq\dot{V}_0+z_1\psi z_2+z_1\left(\psi\alpha_1+\frac{3}{2}\psi^2z_1^2+\frac{1}{2}z_1+\theta_1^T\varphi_1(\hat{\xi}_1)-\dot{y}_r\right)+\frac{1}{2}\|\tilde{\xi}\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\|\theta_1^*\|^2+\frac{1}{q_1}\tilde{\theta}_1^T(q_1z_1\varphi_1(\hat{\xi}_1)-\dot{\theta}_1). \quad (17)$$

虚拟控制信号  $\alpha_1$  与自适应律  $\dot{\theta}_1$  设计如下,其中  $c_1>0, \sigma_1>0$  是待设计参数,  $\alpha_1$  是  $y, y_r, \dot{y}_r, \theta_1, \hat{\xi}_1, \eta_1$  的函数

$$\alpha_1=N(\eta)\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1=c_1z_1^{2\beta-1}+\frac{3}{2}\psi^2z_1^2+\frac{1}{2}z_1+\theta_1^T\varphi_1(\hat{\xi}_1)-\dot{y}_r, \quad (18)$$

$$\eta=z_1\bar{\alpha}_1, \quad (19)$$

$$\dot{\theta}_1=q_1z_1\varphi_1(\hat{\xi}_1)-\sigma_1\theta_1. \quad (20)$$

将(18)、(19)、(20)代入(17)且由(13)可得下式,其中  $\omega_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\|\theta_1^*\|^2$ ,

$$\dot{V}_1\leq-[\lambda_{\min}(\mathbf{Q})-1]\|\tilde{\xi}\|^2+z_1\psi z_2-c_1z_1^{2\beta}+(\psi N(\eta)+1)\eta+\omega_1+\frac{\sigma_1}{q_1}\tilde{\theta}_1^T\theta_1. \quad (21)$$

第  $i(i=2,3,\dots,n-1)$  步:由(5)、(6),计算  $z_i$  的导数为:

$$\dot{z}_i=z_{i+1}+\alpha_i+\theta_i^{*T}\varphi_i(\hat{\xi}_i)+\varepsilon_i-\delta_i+k_i\tilde{\xi}_1-\dot{\alpha}_{i-1}. \quad (22)$$

根据(12)和(22),  $V_i$  的导数为:

$$\dot{V}_i=\dot{V}_{i-1}+z_iz_{i+1}+z_i(\alpha_i+\theta_i^T\varphi_i(\hat{\xi}_i)+\varepsilon_i-\delta_i+k_i\tilde{\xi}_1-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\psi\dot{y}-M_i)+\frac{1}{q_i}\tilde{\theta}_i^T(q_iz_i\varphi_i(\hat{\xi}_i)-\dot{\theta}_i). \quad (23)$$

式中,  $M_i=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\xi}_j}(\hat{\xi}_{j+1}+\theta_j^T\varphi_j(\hat{\xi}_j)+k_j\tilde{\xi}_1)+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\theta_j}\dot{\theta}_j+\sum_{j=1}^i\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}}y_r^{(j)}+\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\eta}\eta$ ,应用 Young's 不等式可得:

$$z_i\left(\varepsilon_i-\delta_i-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\psi\tilde{\xi}_2-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\psi\hat{\xi}_2\right)\leq z_i^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\tilde{\xi}_2^2z_i^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\psi^2z_i^2+\frac{1}{2}\delta_i^2+\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}\varepsilon_i^2+\|\tilde{\xi}\|^2, \quad (24)$$

$$z_i\left(-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\psi\theta_1^{*T}\varphi_1(\hat{\xi}_1)-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\psi\varepsilon'_1\right)\leq\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\psi^2z_i^2+\frac{1}{2}\|\theta_1^*\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2. \quad (25)$$

将(24)、(25)代入(23)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1}+z_iz_{i+1}+z_i\left(\alpha_i+z_i+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\psi^2z_i^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\tilde{\xi}_2^2z_i^2+\theta_i^T\varphi_i(\hat{\xi}_i)+k_i\tilde{\xi}_1-M_i\right)+ \\ &\quad \|\tilde{\xi}\|^2+\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}\|\theta_1^*\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\delta_i^2+\frac{1}{2}\varepsilon_i^2+\frac{1}{q_i}\tilde{\theta}_i^T(q_iz_i\varphi_i(\hat{\xi}_i)-\dot{\theta}_i). \end{aligned} \quad (26)$$

虚拟控制信号  $\alpha_i$  与自适应律设计  $\dot{\theta}_i$  设计如下,其中  $c_i>0, \sigma_i>0$  是待设计参数.

$$\alpha_i=-c_iz_i^{2\beta-1}-z_i-z_{i-1}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\psi^2z_i^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\tilde{\xi}_2^2z_i^2-\theta_i^T\varphi_i(\hat{\xi}_i)-k_i\tilde{\xi}_1+M_i, \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_i=q_iz_i\varphi_i(\hat{\xi}_i)-\sigma_i\theta_i. \quad (28)$$

由(27)和(28)代入(26)可以得到:

$$\dot{V}_i\leq-[\lambda_{\min}(\mathbf{Q})-i]\|\tilde{\xi}\|^2+z_1\psi z_2+z_iz_{i+1}-\sum_{j=1}^ic_jz_j^{2\beta}+(\psi N(\eta)+1)\eta+\sum_{j=1}^i\frac{\sigma_j}{q_j}\tilde{\theta}_j^T\theta_j+\omega_i. \quad (29)$$

式中,  $\omega_i=\omega_{i-1}+\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}\|\theta_1^*\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\delta_i^2+\frac{1}{2}\varepsilon_i^2$ .

第  $n$  步,求得  $V_n$  的导数为:

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n(\mu(t)v + \Delta(t) + \theta_n^T \varphi_n(\hat{\xi}_n) - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \psi \dot{y} + \varepsilon_n - \delta_n + k_n \tilde{\xi}_1 - M_n) + \frac{1}{q_n} \tilde{\theta}_n^T (q_n z_n \varphi_n(\hat{\xi}_n) - \dot{\theta}_n). \quad (30)$$

应用 Young's 不等式,由(4)可得:

$$z_n \Delta(t) \leq \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} \Delta_0^2. \quad (31)$$

其余步骤类似于第  $i$  步,将实际控制器  $v$  和自适应律  $\dot{\theta}_n$  设计为:

$$v = \frac{1}{\mu} \left( -c_n z_n^{2\beta-1} - z_{n-1} - \frac{3}{2} z_n - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right)^2 \psi^2 z_n - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right)^2 \tilde{\xi}_2^2 z_n - \tilde{\theta}_n^T \varphi_n(\hat{\xi}_n) - k_n \tilde{\xi}_1 + M_n \right). \quad (32)$$

$$\dot{\theta}_n = q_n z_n \varphi_n(\hat{\xi}_n) - \sigma_n \theta_n. \quad (33)$$

由(30)、(31)、(32)和(33)可得:

$$\dot{V}_n \leq -[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - n] \|\tilde{\xi}\|^2 + z_1 \psi z_2 - \sum_{j=1}^n c_j z_j^{2\beta} + (\psi N(\eta) + 1) \eta + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \theta_j + \omega_n. \quad (34)$$

式中,  $\omega_n = \omega_{n-1} + \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \|\theta_1^*\|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \delta_n + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2} \Delta_0^2$ .

### 3.2 稳定性分析

**定理 1** 考虑具有未知控制方向和输入死区的非线性系统(1),在假设 3 和引理 5 的条件下,基于模糊状态观测器设计的控制器(18)、(27)、(32)和自适应律(20)、(28)、(29)和(33)可以保证此闭环系统内所有信号的有界性和跟踪误差在零点处的收敛性.

证明:选择李雅普诺夫函数  $V = V_n$ ,由(34)有:

$$\dot{V} \leq -[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - n] \|\tilde{\xi}\|^2 + z_1 \psi z_2 - \sum_{j=1}^n c_j z_j^{2\beta} + (\psi N(\eta) + 1) \eta + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \theta_j + \omega_n. \quad (35)$$

根据引理 4,可得  $(\psi N(\eta) + 1) \eta$  是有界的,也就是说  $|(\psi N(\eta) + 1) \eta| \leq \bar{\omega}$ ,其中  $\bar{\omega}$  是一个正常数.

应用 Young's 不等式,有

$$\frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \theta_j = \frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \theta_j^* - \frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j \leq -\frac{1}{2} \frac{\sigma_j}{q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j + \frac{1}{2} \frac{\sigma_j}{q_j} \|\theta_j^*\|^2, \quad (36)$$

$$z_1 \psi z_2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 \psi^2 + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (37)$$

根据(35)、(36)、(37)及  $|(\psi N(\eta) + 1) \eta| \leq \bar{\omega}$  可得下式,其中  $\hat{c} = \min\{\sigma_i, i=1, 2, \dots, n\}$ .

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - n}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} (\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}\|^2)^\beta - [\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - n] \|\tilde{\xi}\|^2 + \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - n}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} (\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}\|^2)^\beta - \\ & \left( \sum_{j=1}^n c_j z_j^{2\beta} + \frac{1}{2} (z_1^2)^\beta \psi^2 - \frac{1}{2} (z_1^2)^\beta \psi^2 - \frac{1}{2} z_1^2 \psi^2 + \frac{1}{2} (z_2^2)^\beta - \frac{1}{2} (z_2^2)^\beta - \frac{1}{2} z_2^2 \right) + \\ & \hat{c} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j \right)^\beta - \hat{c} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j \right)^\beta - \hat{c} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{2q_j} \|\theta_j^*\|^2 + \omega_n + \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (38)$$

应用引理 2,令  $e=1, \ell_1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j, \ell_2 = z_1^{2\beta}, \ell_3 = \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}\|^2, \ell_4 = z_2^{2\beta}, \mu=1-\beta, \tau=\beta, \kappa=\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$  可以得

到下列不等式:

$$\hat{c} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j \right)^\beta \leq \hat{c} (1-\beta) \kappa + \hat{c} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2q_j} \tilde{\theta}_j^T \tilde{\theta}_j, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} z_1^{2\beta} \psi^2 \leq \frac{1}{2} \psi^2 (1-\beta) \kappa + \frac{1}{2} z_1^2 \psi^2, \quad (40)$$

$$(\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}\|^2)^\beta \leq (1-\beta) \kappa + (\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}\|^2)^\beta, \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} z_2^{2\beta} \leq \frac{1}{2} (1-\beta) \kappa + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (42)$$

将(39)、(40)、(41)和(42)代入(38)有:

$$\dot{V} \leq -\bar{c}V^\beta + \chi. \quad (43)$$

式中,  $\bar{c} = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})^{-n}}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}, 2^\beta c_j, 2^\beta\left(c_1 - \frac{1}{2}\psi^2\right), 2^\beta\left(c_2 - \frac{1}{2}\right), \hat{c}\right\}$ ,  $\chi = \omega_n + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{2q_j} \|\boldsymbol{\theta}_j^*\|^2 + \bar{\omega} + \left(\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{3}{2} + \hat{c}\right)(1-\beta)\kappa$ .

令  $T^* = \frac{1}{(1-\beta)\bar{c}} \left[ V^{1-\beta}(z(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)) - \left(\frac{\chi}{(1-\beta)\bar{c}}\right)^{(1-\beta)/\beta} \right]$ , 有  $z(0) = [z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]^T$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) = [\tilde{\theta}_1(0), \tilde{\theta}_2(0), \dots, \tilde{\theta}_n(0)]^T$ , 由引理 1,  $\forall t \geq T^*$ ,  $V^\beta(z, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \leq \frac{\chi}{(1-\beta)\bar{c}}$ , 得此闭环系统中所有信号都是半全局有限时间稳定的. 此外  $\forall t \geq T^*$  有不等式  $|y - y_r| \leq 2\left(\frac{\chi}{(1-\beta)\bar{c}}\right)^{1/2\beta}$  成立, 即跟踪误差和观测器误差都收敛于原点的一个小邻域, 并在  $T^*$  后保持在该邻域内.

## 4 仿真实例

考虑下面非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = s_1 x_2 + 0.02x_1^3 + 0.03x_1^2 + 0.01\sin(1.5t), \\ \dot{x}_2 = s_2 H(v) + 0.05x_1 x_2^3 + 0.01\cos x_1 + 0.02\cos(2t + 0.25), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (44)$$

式中,  $s_1 = 1, s_2 = -1$ , 参考信号  $y_r = \sin t$ , 对原系统进行坐标变换后新系统和模糊观测器分别为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 - 0.02\xi_1^3 - 0.03\xi_1^2 - 0.01\sin(1.5t), \\ \dot{\xi}_2 = H(v) - 0.05\xi_1 \xi_2^3 - 0.01\cos \xi_1 - 0.02\cos(2t + 0.25), \\ y = -\xi_1. \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 + \boldsymbol{\theta}_1^T \boldsymbol{\varphi}_1(\hat{\xi}_1) + k_1 \tilde{\xi}_1, \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = H(v) + \boldsymbol{\theta}_2^T \boldsymbol{\varphi}_2(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) + k_2 \tilde{\xi}_1. \end{cases} \quad (46)$$

初值分别选为  $\xi_1(0) = 0.2, \xi_2(0) = 0.2, \hat{\xi}_1(0) = 0, \hat{\xi}_2(0) = 0$ , 跟踪误差  $z_1$  定义为:  $z_1 = y - y_r$ .

自适应律的初值为:  $\boldsymbol{\theta}_1(0) = (0, 0, 0, 0.01, 0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\theta}_2(0) = (0, 0, 0, 0, 0.01, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\eta}(0) = 1$ , 设计参数为  $\mu_1 = 1.5, \mu_2 = 1.5, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \check{\mu} = 1, k_1 = 40, k_2 = 30, \psi^2 = 1, \beta = 0.99, c_1 = 0.01, c_2 = 0.01, r_1 = 0.02, r_2 = 0.02, \sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.4$ .

根据设计的控制器  $v$  仿真结果如图 1-图 4 所示, 图 1 是输出信号  $y$  和参考信号  $y_r$  的轨迹, 图 2 是跟踪误差  $z_1$  的仿真结果. 由图 1 和图 2 可以看出, 输出信号  $y$  在控制器  $v$  的作用下具有良好的跟踪性能. 图 3 显示了经过坐标变换后式(45)的状态变量和状态估计, 图 4 给出了模糊自适应参数.

**注 2** 因为状态变量  $\xi_1$  是由原系统的状态变量  $x_1$  经过线性变换得来的, 所以本文最后的仿真结果给出变换后的状态变量  $\xi_1$  及其状态估计  $\hat{\xi}_1$  的图像, 也可反映出  $x_1$  和  $\hat{x}_1$  的变化情况.

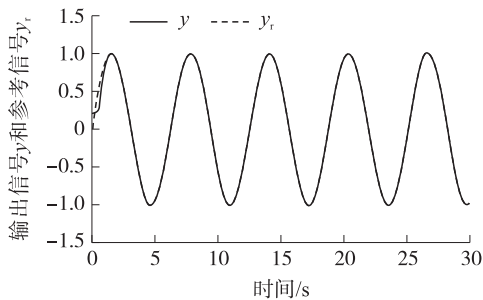


图 1 输出  $y$  和参考信号  $y_r$  的轨迹

Fig. 1 Trajectories of output  $y$  and tracking signal  $y_r$

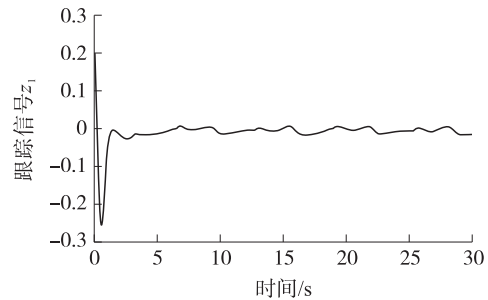


图 2 跟踪误差  $z_1$

Fig. 2 Tracking error  $z_1$

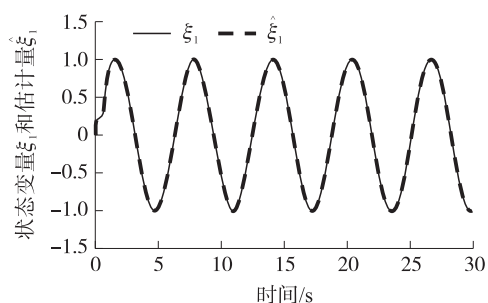

 图 3 状态变量  $\xi_1$  和它的估计量  $\hat{\xi}_1$ 

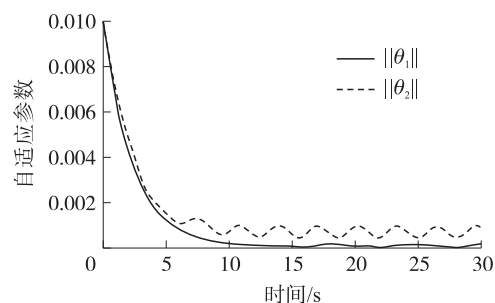
 Fig. 3 State variable  $\xi_1$  and its estimation  $\hat{\xi}_1$ 


图 4 模糊自适应参数

Fig. 4 Fuzzy adaptation parameters

## 5 结论

本文针对一类具有输入死区以及控制方向未知且只有输出可测的非线性系统设计了半全局有限时间控制器. 首先, 引入坐标变换, 将所研究的系统转化为控制增益已知的等效系统. 然后, 设计了一个模糊状态观测器来估计不可测的状态. 通过 Nussbaum 函数解决了该系统控制方向未知的困难, 基于模糊状态观测器, 通过反步法利用变换后的系统间接得到原系统的控制器. 此外, 由仿真算例可以看出在该控制器的作用下跟踪误差在有限时间内保持有界并收敛至原点的一个小邻域内, 且由引理 4 可知闭环系统中的所有信号都保持有界.

## [参考文献] (References)

- [1] TANG Y. Terminal sliding mode control for rigid robots[J]. Automatica, 1998, 34(1): 51–56.
- [2] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(5): 678–682.
- [3] WANG F, ZHANG X Y. Adaptive finite-time control of nonlinear systems under time-varying actuator failures[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 49(9): 1845–1852.
- [4] 许鹏, 李永明. 一类 SISO 非严格反馈非线性系统的自适应模糊有限时间容错控制[J]. 辽宁工业大学学报(自然科学版), 2019, 39(3): 141–148.
- [5] SUN K K, QIU J B, KARIMI H R, et al. Event-triggered robust fuzzy adaptive finite-time control of nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020. DOI: 10.1109/TFUZZ.2020.2979129.
- [6] QI X J, LIU W H, YANG Y G, et al. Adaptive finite-time fuzzy control for nonlinear systems with input quantization and unknown time delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(12): 7718–7742.
- [7] LI Y M, LI K W, TONG S C. Finite-time adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control for MIMO non-strict feedback systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 27(1): 96–110.
- [8] NUSSBAUM R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control[J]. Systems & Control Letters, 1983, 3(5): 243–246.
- [9] MA J L, ZHUANG G M, CUI G Z, et al. Observer-based adaptive control for nonlinear input-delay systems with unknown control directions[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(8): 1543–1555.
- [10] WEN Y, REN X. Observer-based fuzzy adaptive control for non-linear time-varying delay systems with unknown control direction[J]. Iet Control Theory & Applications, 2010, 4(12): 2757–2769.
- [11] 刘树光, 孙秀霞, 解武杰, 等. 一类纯反馈非线性系统的自适应动态面控制[J]. 信息与控制, 2012, 41(3): 301–306.
- [12] 邓涛, 姚宏, 杜军, 等. 控制增益未知非线性系统的动态面控制[J]. 信息与控制, 2013, 42(6): 686–692.
- [13] MA J L, PARK J H, XU S Y. Global adaptive finite-time control for uncertain nonlinear systems with actuator faults and unknown control directions[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 97(4): 2533–2545.
- [14] WU J, CHEN W S, LI J. Global finite-time adaptive stabilization for nonlinear systems with multiple unknown control directions[J]. Automatica, 2016, 69: 298–307.
- [15] WU J, LI J, ZONG G D, et al. Global finite-time adaptive stabilization of nonlinearly parametrized systems with multiple

- unknown control directions[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems, 2016, 47(7):1405–1414.
- [16] LI Y M, TONG S C, LI T S. Observer-based adaptive fuzzy tracking control of MIMO stochastic nonlinear systems with unknown control directions and unknown dead-zones[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 23(4):1228–1241.
- [17] WANG H Q, KARIMI H R, LIU X P, et al. Adaptive neural control of nonlinear systems with unknown control directions and input dead-zone[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems, 2017, 48(11):1897–1907.
- [18] YU J P, SHI P, DONG W J, et al. Adaptive fuzzy control of nonlinear systems with unknown dead zones based on command filtering[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 26(1):46–55.
- [19] LÜ W S, WANG F, ZHANG L L. Adaptive fuzzy finite-time control for uncertain nonlinear systems with dead-zone input[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(5):2549–2558.
- [20] WANG F, CHEN B, LIU X P, et al. Finite-time adaptive fuzzy tracking control design for nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 26(3):1207–1216.

[责任编辑:陈 庆]