

# 基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波电路振荡行为研究

张轩玮, 闵富红, 曹 弋, 叶彪明

(南京师范大学南瑞电气与自动化学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 设计一种基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波振荡电路, 将 PN 结型二极管与电感、电容串并联组合所构成的混合二极管接入低通滤波电路的输入端, 构建一种具有复杂动力学行为的混沌振荡电路. 引入不对称系数来模拟实际电路中二极管元件之间电学特性的偏差, 通过特定参数的相轨迹图、分岔图和 Lyapunov 指数谱对振荡电路的对称、不对称系数下两种振荡状态进行数值分析. 实验产生振荡电路中独特的吸引子共存现象, 揭示了受电路参数调节的对称、不对称共存分岔、反单调特性等丰富的动力学行为演化过程. 最后, 基于 FPGA 技术完成振荡电路的数字电路实验, 验证了数值仿真的正确性和物理可实现性.

[关键词] 低通滤波振荡电路, 混合二极管, 共存分岔, 反单调特性

[中图分类号] O415.5 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2024)02-0001-10

## Research on Oscillation Behavior of Sallen-Key Low-Pass Filter Circuit Based on Hybrid Diode

Zhang Xuanwei, Min Fuhong, Cao Yi, Ye Biaoming

(NARI School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** In this paper, a kind of Sallen-Key low-pass filter oscillator circuit based on hybrid diode is designed. The hybrid diode composed of PN junction diode, inductor and capacitor is connected to the input end of the low-pass filter circuit, and a chaotic oscillation circuit with complex dynamic behavior is constructed. Asymmetry coefficient is introduced to simulate the deviation of electrical characteristics between diode elements in the actual circuit. The phase trajectory diagram, bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of specific parameters are used to numerically analyze the two oscillation states under the symmetry and asymmetry coefficient of the oscillation circuit, and the unique attractor coexistence phenomenon in the oscillation circuit is found. The rich dynamic behavior evolution processes such as symmetric, asymmetric coexisting bifurcation and anti-monotone characteristics regulated by circuit parameters are revealed. Finally, based on FPGA technology, the digital circuit experiment of oscillation circuit is completed, and the correctness and physical realizability of numerical simulation are verified.

**Key words:** low-pass filtering oscillation circuit, hybrid diode, coexistence bifurcation, anti-monotonic characteristics

忆阻器是描述电荷和磁通关系的第四种电路元件, 其本质可以看作是一个具有记忆功能的非线性电阻<sup>[1]</sup>. 作为一种非线性元件, 忆阻器与其他现有电路元件相互连接组合所构成非线性电路较为容易产生混沌振荡信号, 从而使电路呈现出复杂的动力学行为<sup>[2-3]</sup>. 由忆阻器构成的非线性振荡电路是建模和研究非线性动态行为的实用工具, 在安全通信、图像加密、人工神经网络和电力系统稳定性等科学和工程领域得到了广泛的应用<sup>[4-7]</sup>. 近年来, 由全波整流电路构成的二极管桥忆阻器受到国内外学者的青睐<sup>[8-10]</sup>, 相较于由运算放大器和模拟乘法器等实现的忆阻器, 二极管桥忆阻的电路结构更为简单, 没有接地的限制, 可以接在电路的任何地方. 现阶段已有多种基于二极管桥忆阻的非线性电路被设计和提出, 包括基于二极管桥忆阻的 Vander Pol-Duffing 振荡器<sup>[11]</sup>、非线性 Shinriki 振荡器<sup>[12-13]</sup>、基于一阶广义忆阻文氏桥振

收稿日期: 2024-01-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61971228).

通讯作者: 闵富红, 博士, 教授, 研究方向: 非线性电路与系统. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

荡器<sup>[14]</sup>、忆阻低通、高通滤波电路<sup>[15-17]</sup>等,通过相图、分岔图和 Lyapunov 指数谱探究了忆阻振荡电路中呈现的多稳态特性<sup>[18]</sup>、反单调性<sup>[19]</sup>和隐藏吸引子<sup>[20]</sup>等丰富的非线性动力学行为。

Sallen-Key 低通滤波电路是 1955 年 R.P.Sallen 与 E.L.Key 提出的一种由单个运算放大器和电阻、电容组成的二阶滤波器,其拓扑结构简单、振荡稳定,通过改变单个可调电阻即可快速调整滤波器的输入,将忆阻元件与 Sallen-Key 滤波器连接组合所构成的非线性振荡电路不但极大地降低了电路实验的复杂程度,同时也能产生丰富的动力学现象。其中,文献[21]将一种改进型 PI 忆阻器与有源 Sallen-Key 滤波器连接组合,构成了一种新型的无感忆阻蔡氏混沌电路,该电路的优点在于避免了电感对实际电路的影响,使得实际电路具有较好的鲁棒性。文献[22]将忆阻二极管桥接入到 Sallen-Key 低通滤波器的输入端,从中发现了周期-混沌簇发振荡现象,并且在特殊的参数条件下还可产生快-慢通道效应<sup>[23]</sup>。文献[24]提出了一种基于五阶双忆阻器的蔡氏超混沌电路,该电路由 Sallen-Key 滤波器和蔡氏混沌电路组成,将原电路中的线性电阻和非线性电阻替换为两种不同的忆阻,使用多种分析方法揭示了该电路的超级多稳态特性<sup>[25]</sup>等丰富的动力学行为。文献[26]中使用 Sallen-Key 滤波器代替原蔡氏电路的 LC 并联谐振,构建了一种新型无电感蔡氏电路,发现了该电路的倍周期分岔和单、双涡卷吸引子共存等动力学行为,并且其简单的拓扑结构和较小的印刷电路板尺寸有利于基于混沌的各种工程应用。

本文设计了一种基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波振荡电路,利用反并联二极管与电感、电容的串并联组合作为振荡电路中的非线性元件。相较于上文中所述桥式二极管忆阻和蔡氏二极管忆阻,混合二极管电路结构更为简单,易于实现,并且能够使电路呈现出更为丰富的动力学现象。考虑到在实际电路设计中,各元件之间的电学特性有细微的差异,本文通过引入不对称系数来模拟二极管之间电学特性的偏差,从而对非线性振荡电路的对称以及不对称两种振荡状态分别进行数值分析。分析结果表明,基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波振荡电路存在丰富的动力学行为,包括共存分岔、多种对称、不对称共存吸引子和反单调特性等。最后,应用 FPGA 数字电路仿真对振荡电路进行实验,通过仿真波形验证了数值分析的正确性。

## 1 系统模型与基本特性

基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波振荡电路如图 1 所示。电路由两部分组成,其中 Sallen-Key 低通滤波电路由一个运算放大器、等值电容  $C_1$ 、 $C_2$ , 等值电阻  $R_i$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  和可变电阻  $R_f$  组成;混合二极管电路由二极管之间反向并联,再与电感  $L$ 、电容  $C$  相互串并联组成,其中二极管根据电容  $C_1$  与电容  $C$  上产生的电压差值进行开关。

有许多种方法可以实现具有不对称系数  $p$  的电路,本文所采用方法是在二极管  $D_1$  上并联  $m$  个同向二极管,再根据需要在  $D_2$  上并联  $n$  个同向二极管,此时不对称系数  $p$  就可以表示为  $p = m/n$ ,通过调整  $m$ 、 $n$  的比例即可控制系统的对称性。当  $p = 1$  时,两桥臂上分别并联相同数量的二极管,即  $m = n$ ,此时电路处于对称振荡状态,系统的分岔路径和共存吸引子均对称。当  $p \neq 1$  时,以  $m = 4, n = 2$  为例,其中一个桥臂并联两个二极管,另一个桥臂并联 4 个二极管,此时电路切换为不对称振荡状态,系统所呈现出的动力学行为将会发生明显的变化,出现不对称共存分岔、不对称共存吸引子等更为复杂的动力学现象。

将各电容上的电压分别定义为  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $V_c$ ,流过电感的电流定义为  $i_L$ ,流经混合二极管电路的电流定义为  $i_d$ ,根据基尔霍夫定律和肖克利二极管方程,非线性元件的数学表达式可描述为

$$\begin{cases} I_d = I_{D_1} - I_{D_2} = I_s \{ p [ \exp(V_d/nV_T) - 1 ] - [ \exp(-V_d/nV_T) - 1 ] \}, \\ C \frac{dV_c}{dt} = I_s \{ p [ \exp(V_d/nV_T) - 1 ] - [ \exp(-V_d/nV_T) - 1 ] \} - i_L. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $I_s$  为反向饱和电流,  $n$  为发射系数,  $V_T$  为正向导通电压,  $V_d$  表示二极管两端承受电压 ( $n = 1.9, V_T =$

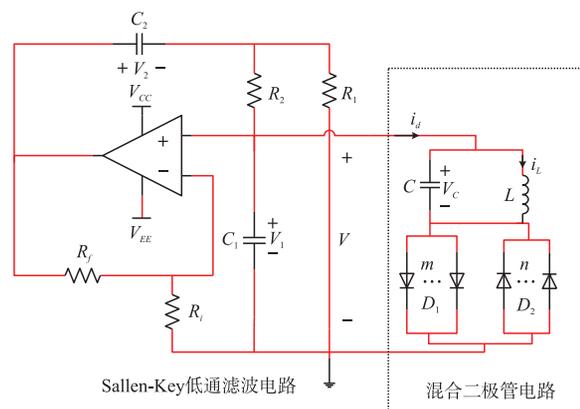


图 1 Sallen-Key 低通滤波振荡电路

Fig. 1 Sallen-Key LPF oscillation circuit

26 mV,  $I_S = 2.682$  nA,  $V_d = V_1 - V_C$ ), 其余元件参数值见表 1.

表 1 电路各元件参数值

Table 1 Parameter values of circuit components

元件	物理意义	参数值	元件	物理意义	参数值
$C_1, C_2$	电容	25 nF	$p$	不对称系数	turnable
$R_1, R_2$	电阻	500 $\Omega$	$C$	电容	10 nF
$R_f$	电阻	7.5 k $\Omega$	$L$	电感	0.5 mH
$R_i$	电阻	3 k $\Omega$			

根据基尔霍夫定律, 振荡电路的状态方程为

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{kV_1 - V_2}{R_2} - I_S \{ p [\exp(V_d/nV_T) - 1] - [\exp(-V_d/nV_T) - 1] \}, \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{kV_1 - V_2}{R_2} + \frac{(k+1)V_1 - V_2}{R_1}, \\ C \frac{dV_C}{dt} = I_S \{ p [\exp(V_d/nV_T) - 1] - [\exp(-V_d/nV_T) - 1] \} - i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} = V_C. \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $k = R_f/R_i$  为运算放大器的负反馈增益系数. 对电路参数进行无量纲处理, 令

$$\tau = t/RC, \rho = nV_T, \alpha = \frac{C}{C_1}, \beta = \rho I_S R, \gamma = \frac{R^2 C}{L}, C_1 = C_2, R_1 = R_2 = R, x = \rho V_1, y = \rho V_2, z = \rho V_3, w = \rho R i_L. \quad (3)$$

将式(3)中新定义变量代入式(2), 得到电路的归一化数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(kx - y) - \alpha\beta \{ p [\exp(x - z) - 1] + [\exp(z - x) - 1] \}, \\ \dot{y} = \alpha(2k + 1)x - 2\alpha y, \\ \dot{z} = \beta \{ p [\exp(x - z) - 1] + [\exp(z - x) - 1] \} - w, \\ \dot{w} = \gamma z. \end{cases} \quad (4)$$

### 1.1 耗散性与吸引子存在性

系统体积收缩率可由其矢量场的散度得到,

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -\{ \alpha(k-2) + \alpha\beta [p \exp(x-z) + \exp(z-x)] + \beta [p \exp(x-z) + \exp(z-x)] \}. \quad (5)$$

式中,  $V$  表示相体积.

根据表 1 中给出的电路参数值以及式(3)中对应的无量纲参数, 计算得  $\alpha = 0.4, k = 2.5, \gamma = 5, \beta = 6.62 \times 10^{-5}$ , 系数  $p$  取值 1、2. 将参数值代入式(5)求得  $\nabla V$  在所有  $(x, y, z, w)$  的情况下均小于零, 由此证明了系统的耗散性, 且系统收敛于

$$\frac{dV}{dt} = \exp(-\{ \alpha(k-2) + \alpha\beta [p \exp(x-z) + \exp(z-x)] + \beta [p \exp(x-z) + \exp(z-x)] \} t). \quad (6)$$

式中,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0$ , 说明系统运动轨迹内的每个体积分量都将以指数速率收缩到零, 因此系统的运动轨迹最终会收敛到体积为 0 的特定子集, 且其渐近的运动轨迹将演化为一个吸引子, 从而证明吸引子的存在.

### 1.2 平衡点与稳定性

令式(4)左侧为零, 求解如下非线性方程组即可得到系统的平衡点

$$\begin{cases} 0 = \alpha(kx - y) - \alpha\beta \{ p [\exp(x - z) - 1] - [\exp(z - x) - 1] \}, \\ 0 = \alpha(2k + 1)x - 2\alpha y, \\ 0 = \beta \{ p [\exp(x - z) - 1] - [\exp(z - x) - 1] \} - w, \\ 0 = \gamma z. \end{cases} \quad (7)$$

则系统的平衡点为

$$P = (\bar{x}, (k+0.5)\bar{x}, 0, \beta \{ p[\exp(\bar{x}) - 1] - [\exp(-\bar{x}) - 1] \} ). \quad (8)$$

式中,  $\bar{x}$  可由如下所示的代数方程求解

$$0.5\bar{x} + \beta \{ p[\exp(\bar{x}) - 1] - [\exp(-\bar{x}) - 1] \} = 0. \quad (9)$$

计算得  $\bar{x}=0$  为式(9)的唯一解, 因此系统仅有一个平衡点  $P_0 = (0, 0, 0, 0)$ . 系统在平衡点处的雅克比矩阵如下

$$J = \begin{bmatrix} \alpha k - \alpha \beta (p+1) & -\alpha & \alpha \beta (p+1) & 0 \\ \alpha (2k+1) & -2\alpha & 0 & 0 \\ \beta (p+1) & 0 & -\beta (p+1) & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

求解雅可比矩阵, 得到平衡点处的特征方程如下

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4. \quad (11)$$

$$\begin{cases} a_1 = \beta + \alpha \beta + 2\alpha - \alpha k + \beta p + \alpha \beta p, \\ a_2 = 2\alpha \beta + \alpha^2 + 2\alpha^2 \beta + \gamma - \alpha \beta k + 2p\alpha^2 \beta + 2\alpha \beta p - \alpha \beta k p, \\ a_3 = \alpha^2 \beta + 2\alpha \gamma + p\alpha^2 \beta - \alpha \gamma k + \alpha \beta \gamma p - \alpha^2 \beta k p, \\ a_4 = \alpha^2 \gamma + 2\alpha^2 \beta \gamma + 2p\alpha^2 \beta \gamma. \end{cases} \quad (12)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 系统稳定的充要条件是劳斯表的第一列元素都是正数, 同时特征方程中所有系数都不等于 0, 且特征方程只要缺项或有负的系数项, 系统便是不稳定的. 由此编制系统在平衡点处的劳斯计算表如表 2 所示.

将参数值代入式(12)和劳斯计算表中, 求得系统特征根  $\lambda_{1,2} = 0.1125 \pm 0.4358i, \lambda_{3,4} = 0.001 \pm 2.4495i$ , 即系统平衡点均为不稳定的焦点, 且特征方程系数  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 > 0$ , 劳斯计算表中第一列元素  $a_1 < 0, b_1 < 0, c_1 > 0$ , 不满足系统稳定的充要条件, 振荡是由不稳定平衡点激发的, 因此 Sallen-Key 低通滤波振荡电路可以产生自激吸引子.

表 2 Routh-Hurwitz 判据计算表

Table 2 Routh-Hurwitz criterion calculation table

特征根	方程系数		
$\lambda^4$	1	$a_2$	$a_4$
$\lambda^3$	$a_1$	$a_3$	/
$\lambda^2$	$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$	$b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}$	/
$\lambda^1$	$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$	/	/
$\lambda^0$	1	/	/

## 2 动力学分析

本节对基于混合二极管的 Sallen-Key 低通滤波振荡电路进行数值仿真分析, 通过改变混合二极管电路的拓扑结构, 将电路分为对称振荡状态 ( $p=1$ ) 和不对称振荡状态 ( $p \neq 1$ ), 采用相轨迹图、分岔图、Lyapunov 指数谱等方法分别研究两种振荡状态下系统呈现出的动力学特性, 从中发现了系统存在的对称共存分岔、不完全对称共存分岔、多种吸引子共存、反单调性等丰富的动力学现象.

### 2.1 负反馈增益对动力学行为的影响

负反馈是振荡电路的重要组成部分, 一定程度的负反馈可以提高电路的性能、改善电路的非线性失真, 使系统更加稳定. 而随着负反馈的加深, 电路将更容易产生自激振荡, 电路中运算放大器将无法正常工作, 系统处于不稳定状态. 为得到电路的起振条件, 对式(2)进行改写

$$\begin{pmatrix} \frac{dV_1}{dt} \\ \frac{dV_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \frac{k}{R_2} & -\frac{1}{C_1} \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2} \left[ \frac{k}{R_2} + \frac{(k+1)}{R_1} \right] & -\frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

令  $a_{11} + a_{22} = 0, C_1 = C_2 = C, R_1 = R_2 = R$ , 计算得电路起振的最低负反馈增益系数  $k=2$ , 即为了产生自激振荡, Sallen-Key 低通滤波振荡电路的负反馈增益系数应满足  $k \geq 2$ . 将负反馈  $k$  作为变量, 其余参数值不变, 绘制出系统分岔图如图 2 所示, 可以看出, 当  $k \leq 2$  时, 电路未达到自激振荡条件, 系统方程的解以及 Lyapunov 指数均为 0, 系统运动状态为稳定不动点, 对应系统相图与时序图如图 3 所示. 当  $k > 2$  时, 电路产生自激振荡, 系统呈现出周期运动, 单、双涡卷混沌以及多个大小不一的周期窗, 如图 4 所示.

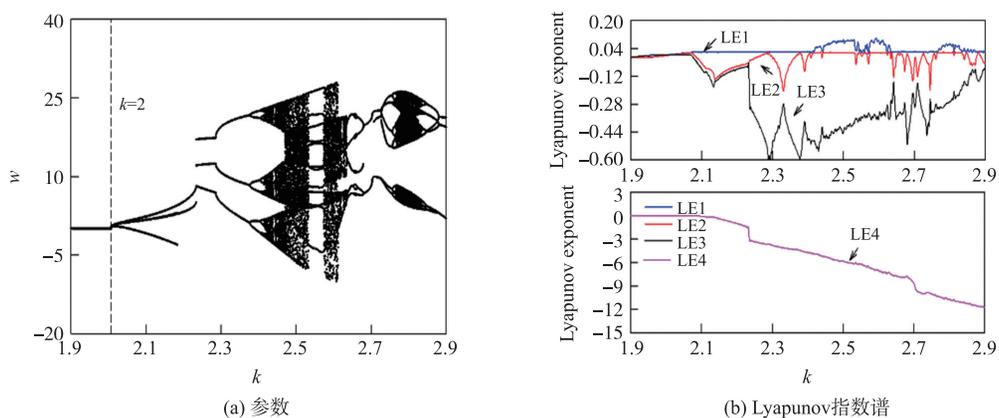


图2 分岔图和 Lyapunov 指数谱

Fig. 2 Bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum

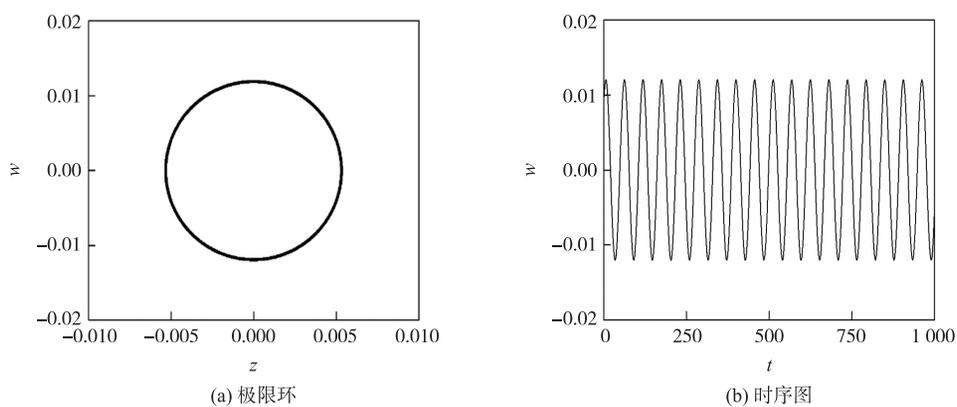


图3  $k \leq 2$  时系统相图与时序图

Fig. 3 Phase and timing diagram of the system at  $k \leq 2$

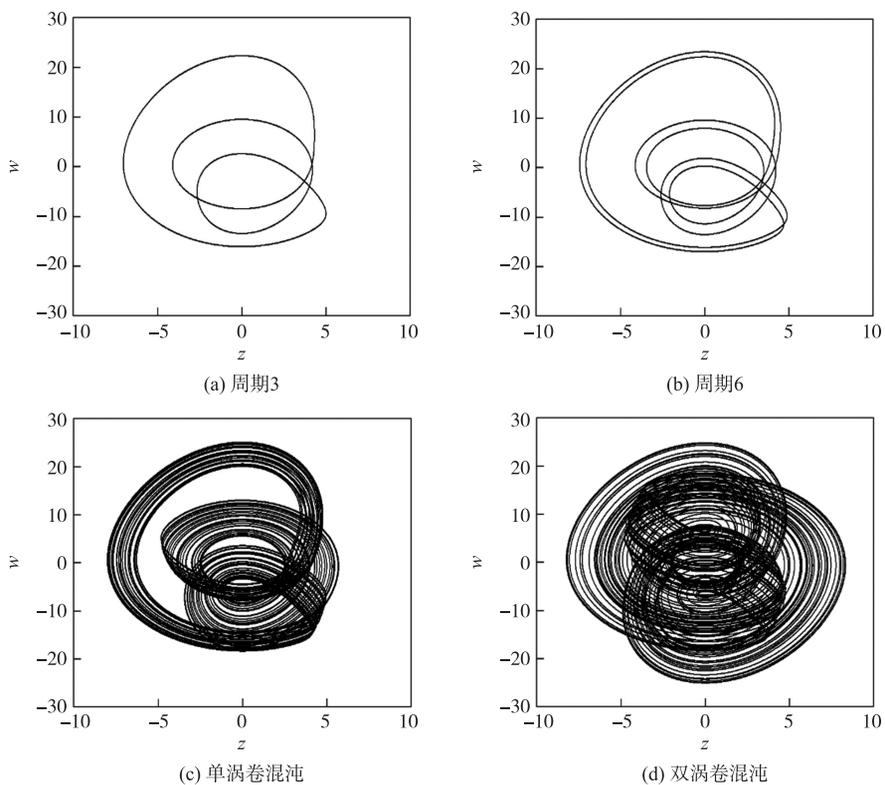


图4  $k > 2$  时系统相图

Fig. 4 Phase diagram of the system at  $k > 2$

### 2.2 混合二极管参数控制下的动力学行为

本节主要研究在不同初值条件的影响下,系统处于对称振荡状态下( $p=1$ )所呈现出的共存分岔现象. 固定其余参数值不变将混合二极管电路中的电容  $C$  作为变量以控制系统参数  $\alpha$  绘制系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱如图 5 所示,其中红色、绿色色标分别对应初值(0,0,0,0.1)和(0,0,0,-0.1). 可以看出,随着参数  $\alpha$  在区间内递增,系统产生的动力学行为包括共存的周期、多周期窗口和混沌运动, Lyapunov 指数的变化验证了系统随参数变化时呈现的分岔行为,相应的对称共存吸引子如图 6 所示.

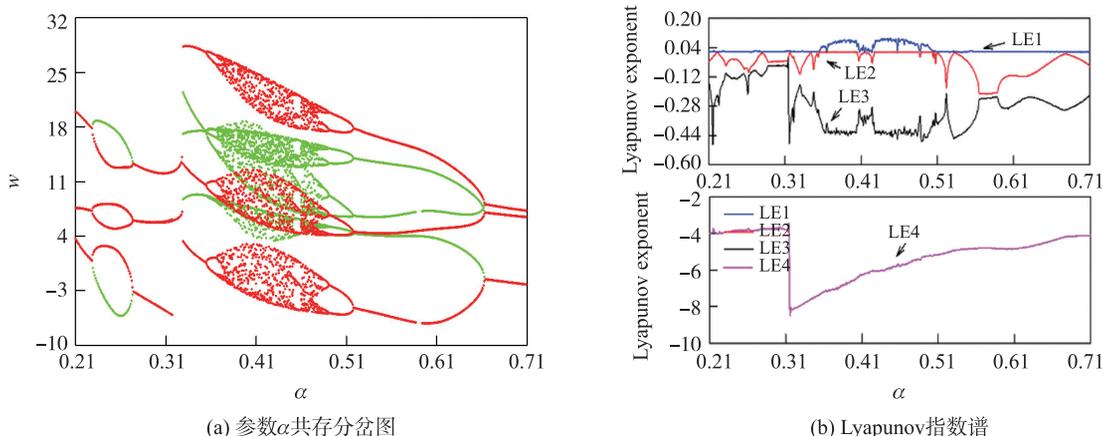


图 5 共存分岔图和 Lyapunov 指数谱

Fig. 5 Coexistence bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum

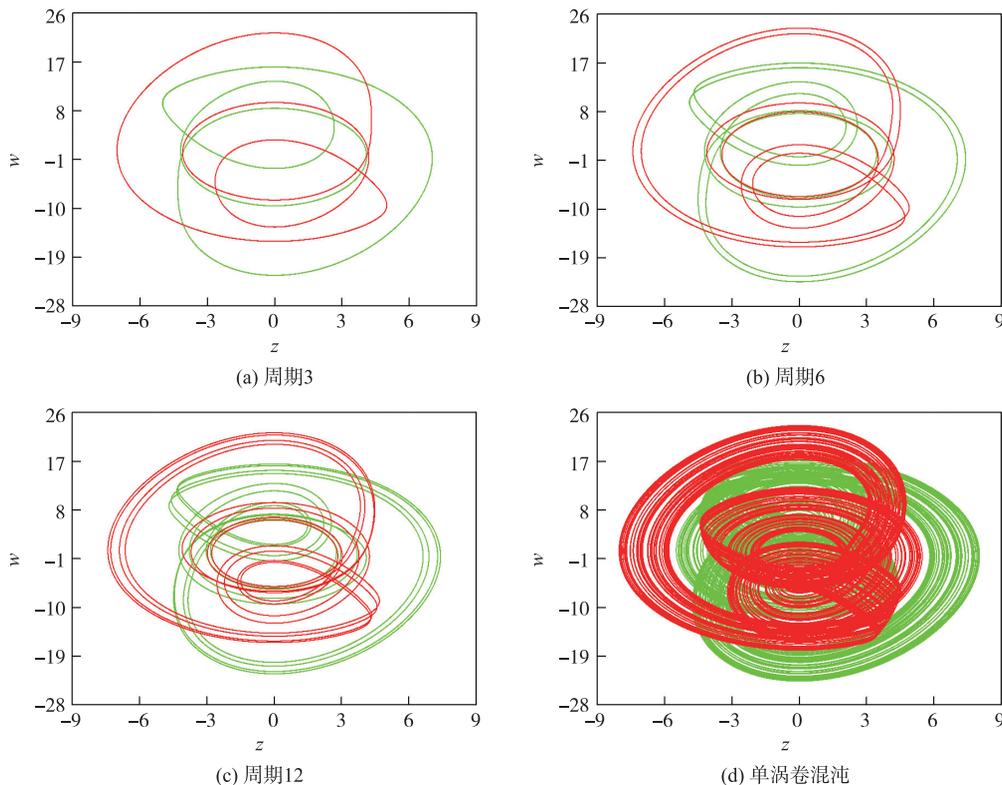


图 6  $z-w$  平面内对称共存吸引子

Fig. 6 Symmetric coexisting attractors in the  $z-w$  plane

### 2.3 不对称动力学现象

当改变混合二极管电路的拓扑结构,使系统处于不对称振荡状态( $p \neq 1$ )时呈现出的动力学现象. 以参数  $\alpha$  为例,选择不对称系数  $p=2$ ,其余参数值不变,绘制系统分岔图如图 7 所示,其中红色、绿色色标分别对应初值(0,0,0,0.1)和(0,0,0,-0.1). 为了更加清晰地展示对称性的改变对系统运动轨迹的影响,选取区间[0.330,0.390]绘制参数  $\alpha$  的局部共存分岔图如图 7(b)所示. 从局部分岔图中可以看出,对称性的

改变对系统的影响主要表现为周期和混沌动力学区域的变化,共存分岔由之前的对称变为不对称,相应的 4 种不对称共存吸引子相轨迹图如图 8 所示。

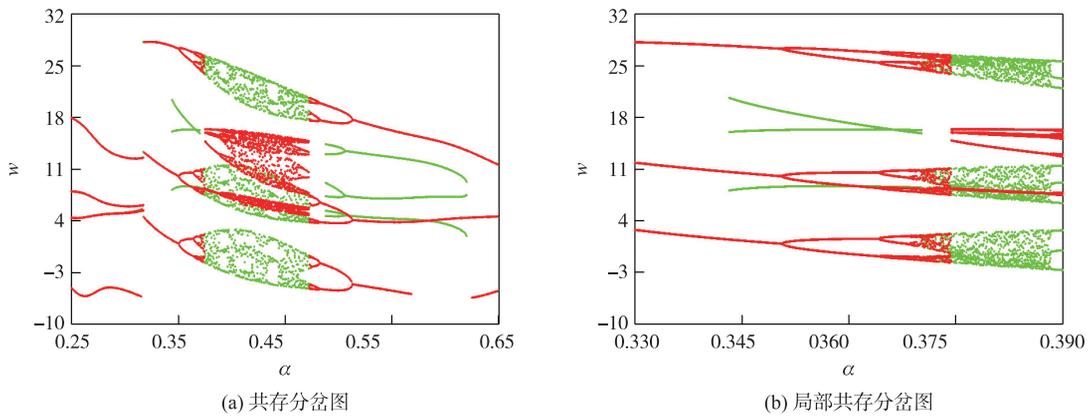


图 7  $p=2$  时参数  $\alpha$  分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram of parameter  $\alpha$  at  $p=2$

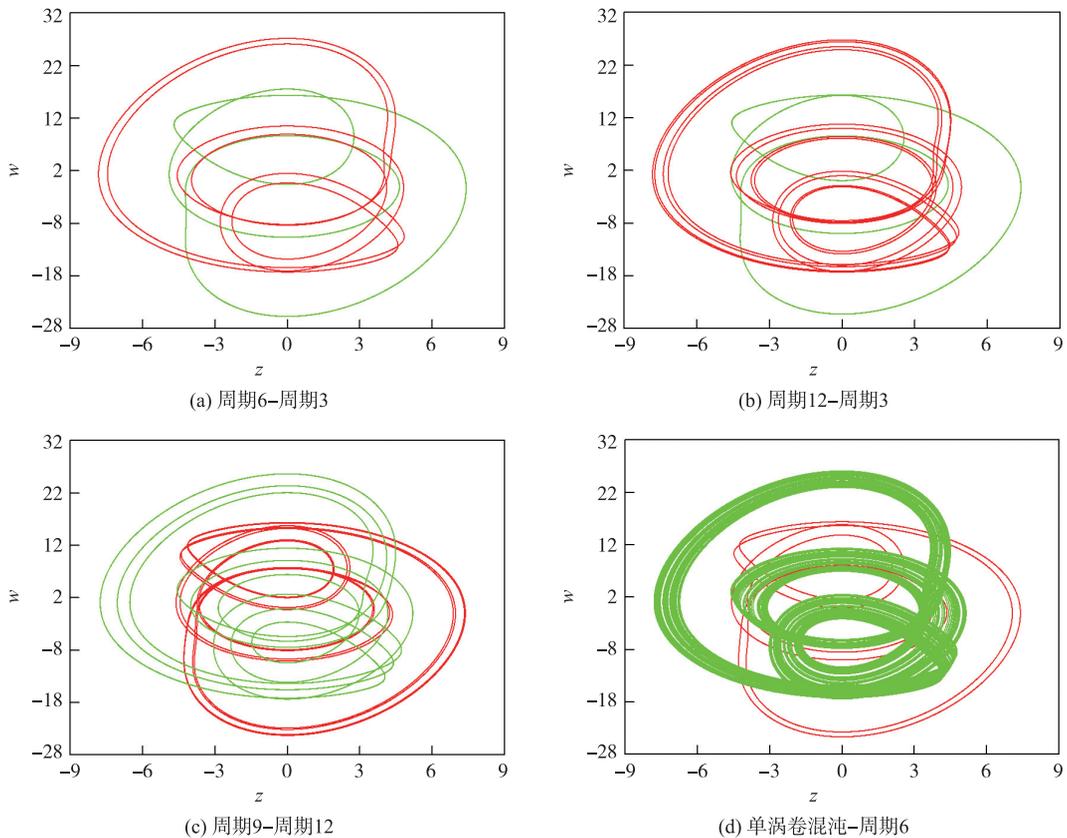


图 8  $z-w$  平面内不对称共存吸引子

Fig. 8 Asymmetrically coexisting attractors in phase  $z-w$

## 2.4 反单调特性

周期轨道的产生与覆灭(反单调特性)是非线性动力系统理论中最基本的分岔过程之一,该特性亦被称为费根鲍姆聚合树. 固定其余参数值不变,通过改变负反馈增益系数  $k$  绘制气泡的演化过程如图 9 所示,对比这组图片可观测到系统发生成对出现的倍周期分岔和反倍周期分岔时形成的反单调现象. 当  $k=2.41$  时,系统周期轨道最先呈现出周期 6 气泡. 当  $k=2.419$  时,系统周期轨道演变为周期 12 气泡. 当  $k=2.423$  时,系统首次产生了完整的费根鲍姆聚合树,周期气泡经倍周期分岔开始分裂为混沌气泡,之后经反向倍周期分岔重新步入周期,并且经混沌气泡逐渐地走向融合,形成一连串大面积的混沌气泡. 最终,随着参数  $k$  增加至 2.442,之前互不接壤的周期-混沌气泡逐渐走向交叉聚合,系统运动轨道形成了更

大范围的周期-混沌气泡串.

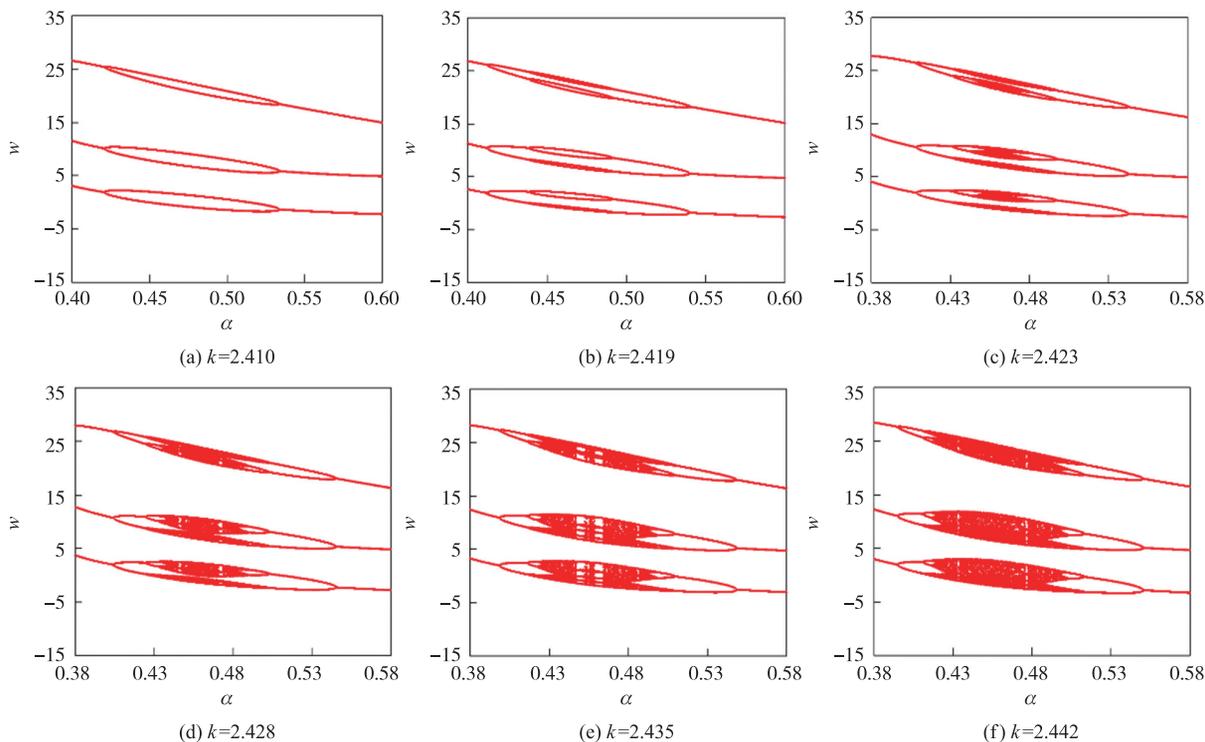


图 9 气泡的演化过程

Fig. 9 The evolution process of bubbles

### 3 基于 FPGA 数字电路的实验仿真

本节使用 FPGA 数字电路技术对 Sallen-Key 低通滤波振荡电路进行电路实验,与前文中数值法得出的结果相互验证. FPGA 是一种可以重复编程的硅芯片,具有高度集成、丰富的片上资源和理论上无限编程次数等优点,系统的初始条件和元件参数通过硬件编程语言进行赋值以实现精确控制,从而能够准确验证系统的动力学行为,非常适用与实现对参数和初值变化极端敏感的非线性振荡电路中. 采用 4 阶龙格-库塔法对式(6)进行离散化处理,

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{1,i} + T/6(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}), \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + T/6(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}), \\ x_{3,i+1} = x_{3,i} + T/6(k_{31} + 2k_{32} + 2k_{33} + k_{34}), \\ x_{4,i+1} = x_{4,i} + T/6(k_{41} + 2k_{42} + 2k_{43} + k_{44}). \end{cases} \quad (14)$$

式中,迭代步长  $T=0.001$ ,  $k_{11} \sim k_{14}$ ,  $k_{21} \sim k_{24}$ ,  $k_{31} \sim k_{34}$ ,  $k_{41} \sim k_{44}$  表示计算的中间变量. 通过调整参数值得到系统周期 3 运动、周期 6 运动和单涡卷混沌运动的共存吸引子波形如图 10 所示. 数字电路结果与数值仿真部分完全相同,验证了电路的正确性.

### 4 结论

本文利用一对反并联 PN 结二极管与电感、电容的串并联组合作为振荡电路中的非线性元件接入 Sallen-Key 低通滤波器的输入端,构建了一种基于混合二极管对的混沌振荡电路,对其存在的多种动力学行为进行了研究. 通过假设二极管之间反向饱和电流之间存在一定的比例来模拟二极管元件电学特性的偏差,对两种振荡状态下的电路分别进行数值分析,通过不同参数对应的相轨迹图、分岔图和 Lyapunov 指数谱,发现了振荡电路中独特的吸引子类型和分岔运动. 研究表明,在对称参数的情况下,电路存在经倍周期分岔到混沌态、反单调特性和多个吸引子共存等现象,同时,在不对称参数的情况下,电路呈现出不对称共存分岔分支和多种非对称共存吸引子等更复杂的非线性动力学行为. 最后,使用 FPGA 数字电路技术对混沌振荡电路进行了电路实验,从示波器中观察到与数值分析相对应多种共存吸引子,既验证了数

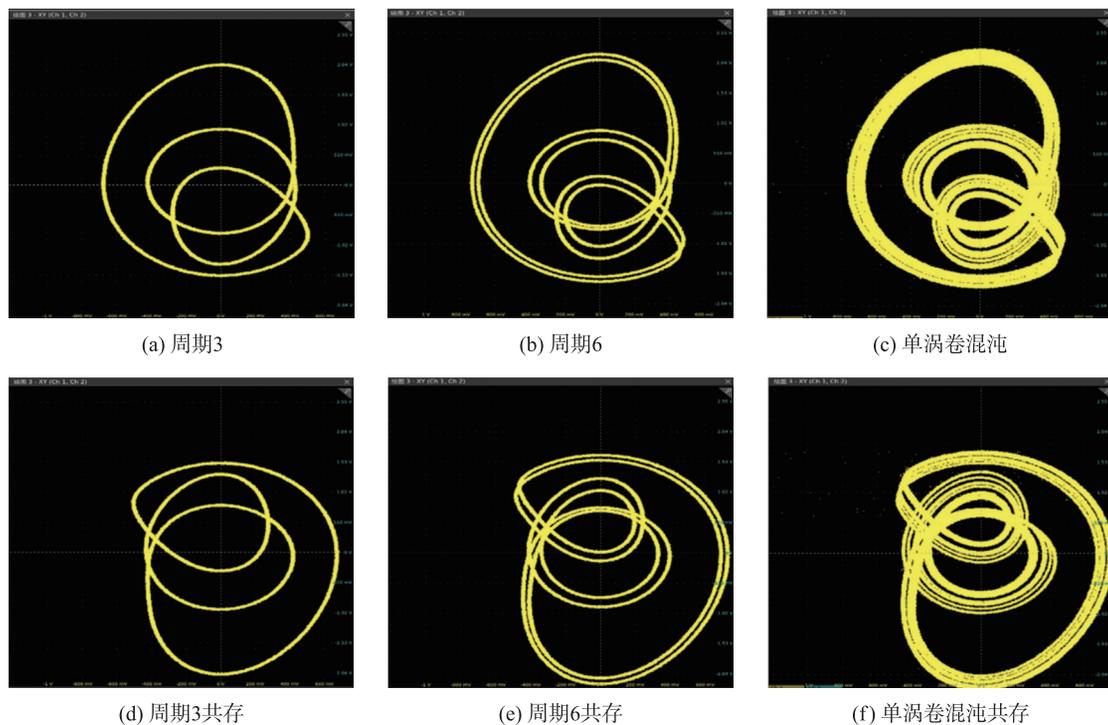


图 10 对称共存吸引子波形

Fig. 10 Phase diagram of symmetric coexisting attractors

值分析的正确性,也验证了电路的物理可实现性,有利于 Sallen-Key 低通滤波振荡电路向实际工程方向发展.

## [参考文献] (References)

- [1] CHUA L. Memristor; the missing circuit element[J]. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1971, 18(5): 507-519.
- [2] 秦铭宏, 赖强, 吴永红. 具有无穷共存吸引子的简单忆阻混沌系统的分析与实现[J]. 物理学报, 2022, 71(16): 160502.
- [3] DONG Y, WANG G, CHEN G, et al. A bistable nonvolatile locally-active memristor and its complex dynamics [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 84: 105203.
- [4] SALEEM A, SIMANJUNTAK F M, CHANDRASEKARAN S, et al. Transformation of digital to analog switching in TaOx-based memristor device for neuromorphic applications[J]. Applied Physics Letters, 2021, 118(11): 112103.
- [5] DING S, WANG N, BAO H, et al. Memristor synapse-coupled piecewise-linear simplified Hopfield neural network: Dynamics analysis and circuit implementation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 166: 112899.
- [6] DENG Z, WANG C, LIN H, et al. A memristive spiking neural network circuit with selective supervised attention algorithm[J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2022, 42(8): 2604-2617.
- [7] ZIDAN M A, STRACHAN J P, LU W D. The future of electronics based on memristive systems[J]. Nature Electronics, 2018, 1(1): 22-29.
- [8] TSAFACK N, KENGNE J, ABD-EL-ATTY B, et al. Design and implementation of a simple dynamical 4-D chaotic circuit with applications in image encryption[J]. Information Sciences, 2020, 515: 191-217.
- [9] NJITACKE Z T, KENGNE L K. Antimonotonicity, chaos and multiple coexisting attractors in a simple hybrid diode-based jerk circuit[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105: 77-91.
- [10] WU H, ZHOU J, CHEN M, et al. DC-offset induced asymmetry in memristive diode-bridge-based Shinriki oscillator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, 154: 111624.
- [11] RAMAKRISHNAN B, NJIMAH O M, KENGNE J, et al. Dynamic analysis of a memristive diode bridge-based higher order autonomous Van der Pol-Duffing oscillator[J]. The European Physical Journal Plus, 2022, 137(7): 787.
- [12] MIN F, XUE L. Routes toward chaos in a memristor-based Shinriki circuit [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2023, 33(2): 023112.

- [13] 吕晏旻, 闵富红. 基于现场可编程逻辑门阵列的磁控忆阻电路对称动力学行为分析[J]. 物理学报, 2019, 68(13): 130502.
- [14] LI C, LI H, XIE W, et al. A S-type bistable locally active memristor model and its analog implementation in an oscillator circuit[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 106(1): 1041–1058.
- [15] BAO B C, WU P, BAO H, et al. Chaotic bursting in memristive diode bridge-coupled Sallen-Key lowpass filter[J]. *Electronics Letters*, 2017, 53(16): 1104–1105.
- [16] 李芳苑, 陈墨, 武花干. 忆阻高通滤波电路准周期与混沌环面簇发振荡及慢通道效应[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(4): 811–817.
- [17] WANG N, LI C Q, BAO H, et al. Generating multi-scroll Chua's attractors via simplified piecewise-linear Chua's diode[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2019, 66(12): 4767–4779.
- [18] PENG G, MIN F. Multistability analysis, circuit implementations and application in image encryption of a novel memristive chaotic circuit[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(3): 1607–1625.
- [19] KAMDOUM TAMBA V, FOTSIN H B, KENGNE J, et al. Emergence of complex dynamical behaviors in improved Colpitts oscillators: antimonotonicity, coexisting attractors, and metastable chaos[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2017, 5: 395–406.
- [20] SPROTT J C, MUNMUANGSAEN B. Comment on a hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 113: 261–262.
- [21] LUO J Y, BAO H, CHEN M, et al. Inductor-free multi-stable Chua's circuit constructed by improved PI-type memristor emulator and active Sallen-Key high-pass filter[J]. *The European Physical Journal Special Topics*, 2019, 228: 1983–1994.
- [22] WU H, YE Y, CHEN M, et al. Extremely slow passages in low-pass filter-based memristive oscillator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97: 2339–2353.
- [23] WANG K, CHENG Y, ZHANG Z, et al. Diverse bursting oscillations in an asymmetric memristive Sallen-Key filter[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 40479–40487.
- [24] BAO B, JIANG T, WANG G, et al. Two-memristor-based Chua's hyperchaotic circuit with plane equilibrium and its extreme multistability[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89: 1157–1171.
- [25] 张贵重, 全旭, 刘嵩. 一个具有超级多稳定性的忆阻混沌系统的分析与 FPGA 实现[J]. 物理学报, 2022, 71(24): 240502.
- [26] ZHU L, PAN M, QIAO X. A chaotic circuit under a new classification framework of inductorless Chua's circuits[J]. *Circuit World*, 2019, 45(4): 208–220.

[责任编辑: 陈 庆]